Def: Matice $A$ je totálně unimodulární, jestliže každá čtvercová podmatice $B$ má $\det(B) \in \{-1; 0; 1\}$.

k sloupců, k řádků – nenutně za sebou

$\boxed{V}$ Nechť $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je totálně unimodulární, $b \in \mathbb{Z}^m$.
Pak mnohostěny $\{x \mid Ax = b \wedge x \geq 0\}$

$\{x \mid Ax \leq b \wedge x \geq 0\}$

mají všechny vrcholy celočíselné.

Navíc LP $\max c^T x$

$x \geq 0$

$Ax \leq b$ nebo $Ax = b$

mají celočíselné optimum, jakmile mají optimum.

Dk: Z minimálního popisu mnohostěnu každý vrchol je průnikem faset, t.j. jediné řešení nějaké části soustavy

$$A'x' = b'$$

$$\cancel{x_i = 0}$$

po vynechání některých rovnic (závislých) bude $A'$ čtvercová

řešení: $$x_i = \frac{\det A'(i)}{\det A'}$$ ← celočíselné, ← $\pm 1$

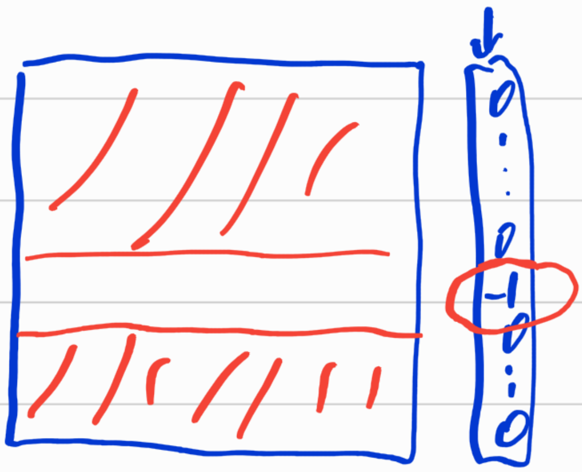
$A'(i)$ … matice $A'$ s $i$-tým sloupcem nahrazeným $b$

Pozorování:

- TU matice má prvky $\{-1, 0, +1\}$
- TU se nezmění
  - transpozicí
  - vynásobením řádku/sloupce $-1$
  - přidáním/odebráním řádku/sloupce s jediným nenulovým prvkem $\pm 1$
  - permutací řádků/sloupců

B:

B'



$\boxed{V}$ Nechť A má v každém sloupci $\leq 2$ nenulové prvky, ty jsou $\pm 1$, a navíc sloupcové součty jsou $\in \{-1, 0, +1\}$. Pak A je TU.

Dk: Nechť B je podmatice A, čtvercová. B také splňuje podmínky

BÚNO: – B nemá sloupce s jediným nenul. prvkem.

– B nemá nulový sloupec

B má jen sloupce s přesně 2 nenulami

$\Rightarrow$ součet řádků je $(0, \dots, 0)$ $\Rightarrow$ $\det(B) = 0$

## Příklady:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ -1 & & & 1 & \\ & -1 & & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{V}$ Nechť $A \in \{-1, 0, +1\}^{m \times n}$ má v každém sloupci $\leq 2$ nenul. prvky. Pak $A$ je TU

$\Leftrightarrow$ můžeme některé řádky přenásobit $-1$ a získat tvar z předchozí věty.

Dk: $\Leftarrow$ přenásobení nezmění TU, použijeme předchozí větu

$\Rightarrow$ BÚNO: každý řádek $\geq 2$ nenuly
každý sloupec $= 2$ nenuly

$$\rightarrow \begin{matrix} 1 & & & & & \\ -1 & \boxed{\begin{matrix} 1 & & +1 \\ -1 & 1 & \\ & -1 & 1 \end{matrix}} & & & +1 \\ & & & 1 & \end{matrix}$$

$\det = 2$ $\quad -1 \quad 1$

$\qquad\qquad -1 \quad 1$

---

## Příklady:

Incidenční matice neorientovaného grafu je TU $\Leftrightarrow$ graf je bipartitní

$$\begin{array}{c|c} & e_1 \; e_2 \; \dots \; uv \\ u \\ -1 \; v \end{array} \begin{pmatrix} & & 1 & \\ & & 0 & \\ & & 0 & \\ & & -1 & \\ & & 0 & \\ & & \vdots & \end{pmatrix}$$

Incidenční matice orientovaného grafu je TU vždy

$$\begin{array}{c} \\ u \\ v \end{array} \begin{pmatrix} \vec{uv} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

# BIPARTITNÍ PÁROVÁNÍ MAX. VELIKOSTI

$G=(V,E)$ neor. graf bipartitní

LP: $\max \sum_{e\in E} x_e$

$x_e \geq 0$

$(\forall v\in V)\ \sum_{e:\, v\in e} x_e \leq 1$

duální LP: $\min \sum_{v\in V} y_v$

$y_v \geq 0$

$(\forall uv\in E)\ y_u + y_v \geq 1$

celočíselné optimální řešení $\leftarrow$ vrcholové pokrytí minimální

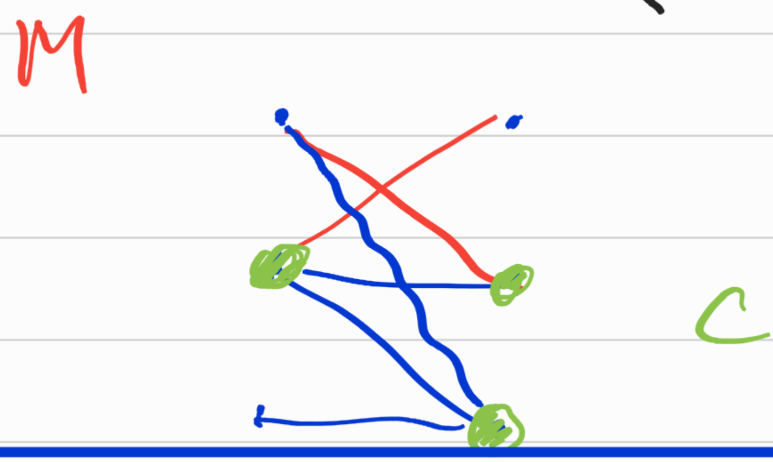
matice LP je TU

$\Rightarrow$ celočíselné optimum je 0,1-řešení ze struktury LP

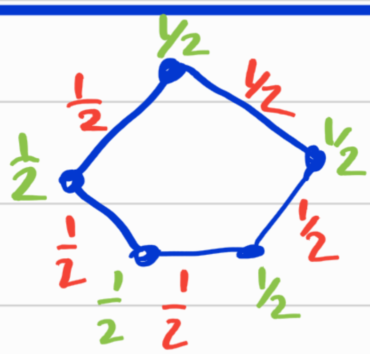
$\boxed{V}$ (König) V bipartitním grafu

$\max\{|M| \mid M \text{ je párování}\} = \min\{|C| \mid C \text{ je vrchol. pokrytí}\}$

$\leq$




G není bip. – neplatí




$|M| \leq 2$

$|C| \geq 3$

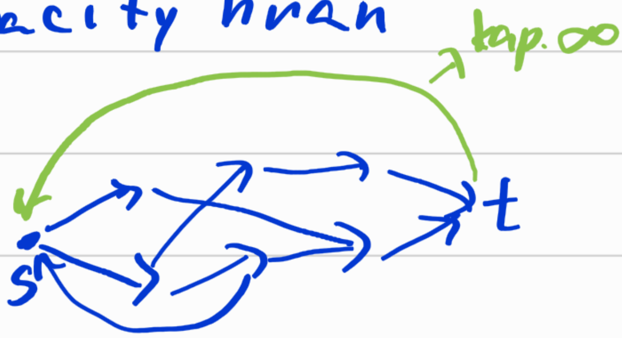
# TOKY V SÍTÍCH

VSTUP: $G=(V,E)$ orientovaný graf

$h: E \to \mathbb{R}_0^+$ kapacity hran

$s, t \in V$

CÍL: tok $x_e \geq 0$




......

$$f_x(v) = \sum_{u:\, uv \in E} x_{uv} - \sum_{w:\, vw \in E} x_{vw}$$

LP: $\max x_{ts}$ optimum = max. tok z s do t

$x_e \geq 0$

$x_e \leq h(e)$ $\quad z_e \geq 0$

$(\forall v \in V) \quad f_x(v) = 0 \quad y_v \in \mathbb{R}$

$\boxed{V}$ Je-li $h(e) \in \mathbb{Z}$ pro všechna $e \in E$, pak existuje celočíselný max. tok.

Duální LP:

$$\min \sum_e h(e) \cdot z_e$$

$z_e \geq 0$

$y_v \in \mathbb{R}$

$\forall uv \in E \quad -y_u + y_v + z_{uv} \geq 0$

$$-y_t + y_s \geq 1$$

Pozorování:

[optimální] celočíselné řešení definuje [minimální] řez oddělující $s,t$

$$U = \{v \mid y_v > y_t\}$$

řez $\{uv \mid uv \in E \cap U \times (V \setminus U)\}$

$$s \in U \qquad t \notin U$$

$uv$ v řezu

$$y_u \geq y_v + 1$$

$$\Rightarrow z_{uv} \geq 1$$

$\Rightarrow$ účelová fce $\geq$ cena řezu

$\boxed{V}$ Cena minimálního řezu

= velikost max. toku