

$$\begin{array}{ll}
 \max c^T x \leq b^T y & \min \bar{b}^T y \geq c^T x \\
 (P) \quad x \in \mathbb{R}^n & (D) \quad y \geq 0 \\
 Ax \leq b \quad | \cdot y & A^T y = c \quad | \cdot x \\
 y^T Ax \leq b^T y & x^T A^T y = c^T x
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \max c^T x & \min b^T y \\
 (\bar{P}) \quad x \geq 0 & (\bar{D}) \quad y \geq 0 \\
 Ax \leq b & A^T y \geq c
 \end{array}$$

DUALITA OBECNĚ:

PROMĚNNÉ: $y_i \in \mathbb{R}$ pro $\sum a_{ij} x_j = b_i$

$y_i \geq 0$ pokud $\sum a_{ij} x_j \leq b_i$ a prim.LP max.

$\sum a_{ij} x_j \geq b_i$ a prim.LP min.

ÚČELOVÁ FCE:

$\min \sum b_i y_i$ jestliže prim.LP max

$\max \sum b_i y_i$ ——— || ——— min

PODMÍNKY:

$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i = c_j$ pro x_j neomezené

$\sum a_{ij} y_i \geq c_j$ pro $x_j \geq 0$ a prim.LP max.

$\sum a_{ij} y_i \leq c_j$ ——— || ——— prim.LP min

L: Duální LP k duálnímu LP
je původní LP

$$\begin{array}{ll} \text{(P)} & \max c^T x \leq b^T y \\ & x \in \mathbb{R}^n \\ & Ax \leq b \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{(D)} & \min b^T y \\ & y \geq 0 \\ & A^T y = c \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{(\bar{P})} & \max c^T x \\ & x \geq 0 \\ & Ax \leq b \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{(\bar{D})} & \min b^T y \\ & y \geq 0 \\ & A^T y \geq c \end{array}$$

V (podmínky komplementarity)

Nechť x a y jsou příp. řešení (P) a (D)

Pak x i y jsou optimální $\Leftrightarrow$

$$(\forall i = 1, \dots, m) (y_i = 0 \vee \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i) \quad (*)$$

a navíc

$$(\forall j = 1, \dots, n) (x_j = 0 \vee \sum_i a_{ij} y_i = c_j) \quad (**)$$

Dk:

$$y^T b - c^T x = y^T (b - A^T x) =$$

$$= \sum_{i=1}^m \underbrace{y_i}_{\geq 0} \underbrace{\left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right)}_{\geq 0} \geq 0$$

rovnost $\Leftrightarrow$ (*)

$$\begin{aligned} y^T b - c^T x &= y^T b - y^T A x + y^T A x - c^T x \\ &= y^T (b - A x) + (y^T A - c^T) x \geq 0 \end{aligned}$$

PERFEKTNÍ PÁROVÁNÍ MINIMÁLNÍ CENY

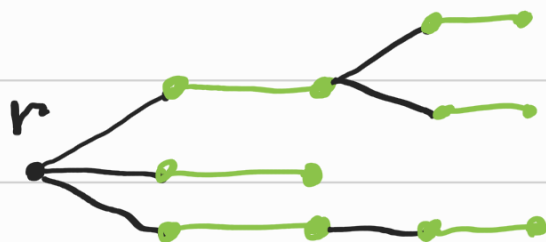
VSTUP: $G = (V, E)$ $c_e \geq 0$ pro $e \in E$

VÝSTUP: perfektní párování M
t.j. $M \subseteq E$ tak, že $(\forall v_v) \deg_M(v) = 1$

CÍL: minimalizovat $\sum_{e \in M} c_e$

DNES: G je bipartitní

Def: Dáno $G=(V,E)$, $M \subseteq E$ párování ($\deg_M(v) \leq 1$)
 Střídavý strom



$$T = (V(T), E(T), r)$$

$A(T)$... vrcholy T v liché vzdálenosti od r

$B(T)$... —||— v sudé —||—

- r není spárovaný
- $(\forall v \in A(T))$ (v má právě jednoho syna u a $vu \in M$)

POUŽITÍ:



Pozorování: $|B(T)| = |A(T)| + 1$

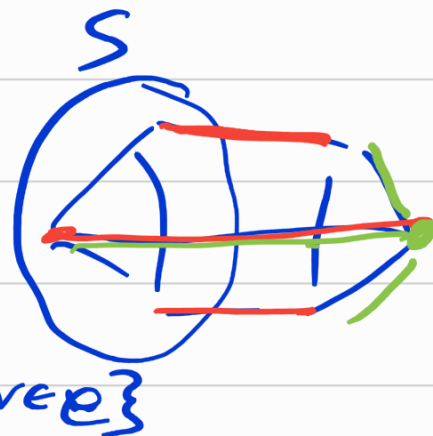
Značení: x_e ... proměnná pro hranu e

$$x_e = \begin{cases} 1 & e \in M \\ 0 & e \notin M \end{cases}$$

$$F \subseteq E \quad x(F) = \sum_{e \in F} x_e$$

$$\delta(S) = \{e \in E \mid |e \cap S| = 1\}$$

$$S \subseteq V \quad \delta(v) = \delta(\{v\}) = \{e \in E \mid v \in e\}$$



Primární LP:

$$\min \sum_{e \in E} c_e x_e$$

přes

$$x_e \geq 0 \quad \forall e \in E$$

za podmínek

$$x(\delta(v)) = 1 \quad \forall v \in V$$

Dualní LP:

$$\max \sum_{v \in V} y_v$$

pro

$$y_v \in \mathbb{R} \quad \forall v \in V$$

za podmínek

$$y_u + y_v \leq c_{uv} \quad \forall uv \in E$$

Komplementarita:

$$(\forall uv \in E) \quad x_{uv} = 0 \vee y_u + y_v = c_{uv}$$

PRIMAŘNĚ-DUALNÍ ALG.

udržíme a vylepšujeme

$\begin{cases} M \dots \text{párování, ne nutně perf.} \\ Y \dots \text{přípustné řeš. dualního LP} \end{cases}$

→ Splňují podmínky komplementarity

Pro dané y , $E_+ = \{uv \in E \mid y_u + y_v = c_{uv}\}$

→ t.j. $M \subseteq E_+$

ALGORITHMUS

γ, M, T

invarianty: γ příp. řeš. duálního LP

T ... střídací strom

$$M \cup E(T) \subseteq E =$$

$$(1) \gamma = \vec{0}, M = \emptyset$$

$$(2) M \text{ perfektní} \Rightarrow \text{konec, vst. } M$$

$r := \text{libovolný nespárovaný vrchol}$
 $T = (\{r\}, \emptyset, r)$

$$(3) \text{Zvětšujeme } T \text{ v } E = \Leftrightarrow$$

- buď přidáme 2 vrcholy a hrany
- nebo zvětšíme M , $\rightarrow (2)$

$$(4) \text{Změníme } \gamma$$

