

L (Farkasova pramenovnice): $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$

Soustava $Ax \leq b$ má řešení $\iff$

$\iff$ neexistuje $y \in \mathbb{R}^m$: $y \geq 0$, $A^T y = 0$, $b^T y < 0$

$\Downarrow$ k: $\Rightarrow$ minule, přenosobení y

$\Leftarrow$ indukci dle n

$$(S1): \left. \begin{array}{ll} \bar{A}_{i*} \bar{x} + x_n \leq b_i & i = 1, \dots, m' \\ \bar{A}_{i*} \bar{x} - x_n \leq b_i & i = m'+1, \dots, m'' \\ \bar{A}_{i*} \bar{x} \leq b_i & i = m''+1, \dots, m \end{array} \right\} y_i$$

$$(S2): \left. \begin{array}{ll} (\bar{A}_{i*} + \bar{A}_{j*}) \bar{x} \leq \underline{b_i} + b_j & i = 1, \dots, m' \quad j = m'+1, \dots, m'' \quad y'_{ij} \\ \bar{A}_{i*} \bar{x} \leq \underline{b_i} & i = m''+1, \dots, m \quad y'_i \end{array} \right\}$$

$(S1) \text{ sporá } \Rightarrow (S2) \text{ sporá } \Rightarrow \exists y' \text{ pro } (S2) \Rightarrow \exists y \text{ pro } (S1)$

$$i = 1, \dots, m' \\ y_i = \sum_j y'_{ij}$$

ind. předpoklad

$$j = m'+1, \dots, m'' \\ y_j = \sum_i y'_{ij}$$

$$j = m''+1, \dots, m \\ y_j = y'_j$$

$\Rightarrow$: $\underline{x'}$ řešení (S2) $\rightsquigarrow$ x řešení (S1)

$$(S1) \quad \begin{array}{ll} x_n \leq b_i - \bar{A}_{i*} x' & i \leq m' \\ \bar{A}_{j*} x' - b_j \leq x_n & j = m'+1, \dots, m'' \end{array}$$

$$(S2) \quad \bar{A}_{j*} x' - b_j \leq b_i - \bar{A}_{i*} x'$$

L (Farkasovo): Soustava $Ax=b$ má nezáporné řeš.

$\Leftrightarrow$ neexistuje y takže $A^T y \geq 0 \wedge b^T y < 0$

Dk: $\Rightarrow$ nechť x je řešení, $y \dots \rightarrow$

$$0 \leq y^T Ax = y^T b < 0$$

$\Leftarrow$ Nechť $Ax=b$ nemá nezáporné řeš.
to je ekv. $A'x \leq b'$ nemá řeš. y

$$A' = \begin{pmatrix} A \\ -A \\ -I_n \end{pmatrix} b' = \begin{pmatrix} b \\ -b \\ 0 \end{pmatrix} \quad y' \begin{cases} Ax \leq b \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \exists y' \quad y' \geq 0 \quad A'y' = 0 \quad b'y' < 0$$

$$y_i = y'_i - y'_{i+m}$$

levá strana: $A'y' = Ay \geq 0$ něco

[V] Nechť $Ax \leq b$ má řešení.

Pak (každé řešení $Ax \leq b$ splňuje $c^T x \leq d$)

$$\Leftrightarrow (\exists y \geq 0) (A^T y = c \wedge b^T y \leq d)$$

Dk: $\Leftarrow$ pokud máme y a řešení x

$$\tilde{c}x = y^T A x \leq y^T b \leq \delta$$

$\Rightarrow$ necht' $\nexists y$ splňující podmínky
najdeme $x: Ax \leq b, c^T x > \delta$

$\rightarrow$ neexistuje nezáporné řešení (y, λ)

$$A^T y = c \quad | \cdot z$$

$$b^T y + \lambda = \delta \quad | \cdot \mu$$

Z Farkasova lemmatu $\exists z, \mu$

$$c^T \cdot z + \delta \mu < 0$$

$$A \cdot z + b \mu \geq 0$$

$$\mu \geq 0$$

$$\mu > 0$$

$$x := -\frac{1}{\mu} z \quad Ax \leq b \quad c^T x > \delta$$

$$\mu = 0$$

$$x := x_0 - Mz$$

$\hookrightarrow$ řešení $Ax_0 \leq b$

$M > 0$ M velké číslo

$$Ax = Ax_0 - \underbrace{M}_{\geq 0} Az \leq Ax_0 \leq b$$

$$c^T x = c^T x_0 - \underbrace{M c^T}_{\leq 0} \cdot z, \quad \begin{matrix} > \text{cokoliv} \\ > 0 \end{matrix}$$

$$(P) \quad \begin{aligned} &\max c^T x \\ &x \in \mathbb{R}^n \\ &Ax \leq b \end{aligned}$$

$$(D) \quad \begin{aligned} &\min b^T y \\ &y \geq 0 \\ &A^T y = c \end{aligned}$$

$\boxed{V}$ (slabá dualita) x, y přípustná řeš. (P) a (D)
pak $c^T x \leq b^T y$

Dk: $Ax \leq b \quad | \cdot y$

$$c^T x = y^T Ax \leq y^T b$$

$\boxed{V}$ (o dualitě) Pro (P) a (D) platí právě jedno z:

- (1) (P) : (D) jsou nepřípustné
- (2) jeden z (P) a (D) je neomezený, druhý nepřípustný
- (3) existují optimální řešení x^*, y^* a $c^T x^* = b^T y^*$

Dk: (P) nebo (D) neomezený $\Rightarrow$ (2)

Nechť (P) je přípustný a omezený

$$\delta = \sup \{ c^T x \mid x \in \mathbb{R}^n, Ax \leq b \}$$

Ze slabé v. dualitě ($\forall y$ příp. řeš. (D)) $\delta \leq b^T y$

každé x splňující $Ax \leq b$ ↖ def. δ
splňuje i $c^T x \leq \delta$

z věty o odvozování nerovnic

$$(\exists y \geq 0) (A^T y = c \wedge b^T y \leq \delta)$$

y je příp. řeš. (D)

tedy $b^T y = \delta$ a y je optimum