

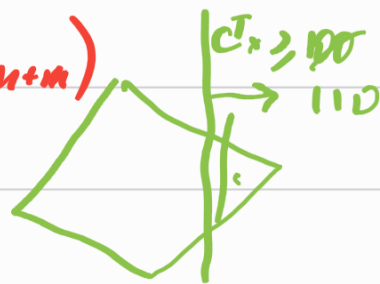
max

$$\cancel{c^T} x - (x_{n+1} + \dots + x_{n+m})$$

$$x \geq 0$$

$$\cancel{A} x = b$$

$$A x + \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{pmatrix}$$



$$x_B = p + Q x_N$$

$$z = z_0 + r^T x_N$$

Hledání počátečního řešení

Předpokládáme $b \geq 0$

Pomocná úloha

$$\text{proměnné } \bar{x} = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m})^T$$

$$\text{maximalizuj } -(x_{n+1} + \dots + x_{n+m})$$

$$\text{přes } \bar{x} \geq 0$$

$$\text{zapodminek } \bar{A} \bar{x} = b$$

$$\bar{A} = (A \mid I_m)$$

$$\text{Počáteční } B = \{n+1, \dots, n+m\}$$

je přípustná

optimum $> 0 \Rightarrow$ původní úloha
nepřípustná

optimum = 0 $\Rightarrow$ typicky
skončíme s $\mathbb{B}$ ve starých
proměnných

$$x_{n+5} = 0 + \dots x_N$$

počet kroků simplexové metody

- typicky lineární
- jsou známé příklady, kdy
je # kroků 2^n



Existují algoritmy pro LP s časovou
složitostí $\text{poly}(n, m, L)$

L počet bitů vstupu

a_{ij} ... celé číslo ... #bitů $\log_2(a_{ij}) + 1$
... racionální ...

$$a \cdot b \dots \text{délka}(a \cdot b) = \text{délka}(a) + \text{délka}(b)$$

Gaussovu metodu lze implementovat
v polynomiálním čase

$$Ax = b \text{ s jediným řešením}$$

$$x_i = \frac{\det \bar{A}^{(i)}}{\det A}$$

$$\# \text{bitů}(\det A) \leq \text{poly}(n, \# \text{bitů} A)$$

$$\det A = \sum_{\pi \in S_n} \pm \prod_{i=1}^n a_{i, \pi(i)}$$

$$\# \text{bitů} A \leq L$$

$$\underbrace{\underbrace{\prod_{i=1}^n a_{i, \pi(i)}}_{n \cdot L}}_{n \cdot L}$$

$$\leq n! \cdot 2^{n \cdot L}$$

$$\# \text{bitů} \leq n \cdot \log n + n \cdot L$$

LP má optimum zapisané $\text{poly}(n, m, L)$ bitů

ELIPSOIDOVÁ METODA

- hledá přípustné řešení;
- předpokládá, že množstevn příp. řešení
 - buď $= \emptyset$
 - nebo má plnou dimenzi
- opatříme si kouli, která obsahuje) předpoklad všechna příp. řešení



METODY VNITŘNÍHO BODU



DUALITA LP

Farkasovo lemma: $Ax \leq b$ má řešení

$$\Leftrightarrow \neg(\exists y) \left(\begin{array}{l} \underline{y \geq \vec{0}} \wedge \\ \wedge \underline{A^T y = \vec{0}} \wedge \\ \wedge \underline{\vec{b}^T y < 0} \end{array} \right)$$

Dk: $\Rightarrow$ Pro spor, máme $x \underline{=}$ y
splňující podmínky

Pak $0 = \underbrace{y^T Ax}_{\vec{0}} \leq \underline{y^T b} < 0$

$\Leftarrow$ předpokládáme, že $Ax \leq b$
nemá řešení
najdeme vhodné y

indukcí podle n

$$n=0$$

$$0 \leq b_1$$

$$y_1 = 0$$

$$0 \leq \underbrace{b_2}_{< 0} < 0$$

$$y_2 = 1$$