

OPTIMALIZAČNÍ ÚLOHY

- toky v sítích
- nejkratší cesty
- maximální párování
- minimální kostra
- problém batohu
- TSP - obch. cestující
- nejdelší cesta
- bin packing
- vrch. pokrytí
- nezávislá množina

Co je opt. úloha:

- množina všech vstupů - instancí
- přípustná řešení pro daný vstup I
- hodnota příp. řešení - účelová funkce
- cíl: maximalizovat / minimalizovat

Co je úloha lineárního programování

- instance: soustava lineárních nerovnic
- řešení: hodnoty proměnných splňující soustavu
- účelová fce: lineární funkce
- cíl: max/min

MATICOVÉ HRY

		K	N	P	optimum
P_1	K	0	+10	-1	$P_1 = P_2 = P_3 = \frac{1}{3}$ výhra = 0
P_2	N	-1	0	+1	
P_3	P	+1	-1	0	
X ... výhra		↑	↑	↑	

$$\begin{array}{rcl}
 -P_2 + P_3 & \geq & x \quad | \cdot 4 \\
 10P_1 - P_3 & \geq & x \quad | \cdot 1 \\
 -P_1 + P_2 & \geq & x \quad | \cdot 7 \\
 P_1 + P_2 + P_3 & = & 1 \quad | \cdot (-3)
 \end{array}$$

$$P_1, P_2, P_3 \geq 0$$

$$\max x$$

$$P_1 = \frac{1}{12} \quad P_2 = \frac{4}{12} \quad P_3 = \frac{7}{12} \quad x = \frac{3}{12}$$

$$0 \geq 12x - 3$$

$$x \leq \frac{3}{12}$$



- teorie LP, mnohostěny
- vztah LP a komb. optimalizace
- algoritmy pro LP
- celočíselná řešení
 - totální unimodularita
 - celočíselné programování
- párování
- matroidy

Def: Úloha LP v kanonickém tvaru je opt. úloha
daná maticí $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, vekt. $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$
maximalizuj $c^T \cdot x$

pro $x \in \mathbb{R}^n$

za podmínek $Ax \leq b$

Úloha LP v rovnicovém tvaru $A, b, c \dots$
maximalizuj $c^T \cdot x$

pro $x \in [0, +\infty)^n$

$x \geq 0$

za podmínek $Ax = b$

$$Ax = b \rightsquigarrow Ax \leq b$$

$$-Ax \leq -b$$

$$\underline{x \geq 0} \rightsquigarrow x \in \mathbb{R}^n + \text{podmínky } x \leq 0$$

$$x \rightsquigarrow x = x^+ - x^- \quad x^+, x^- \geq 0$$

$$Ax \leq b \rightsquigarrow Ax + z = 0 \quad z \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{1n} & 1 & 0 \\ a_{m1} & a_{mn} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow m$ proměnných

lineární funkce $c^T x$

- optimální řešení x .. přípustné
 x příp., nabývá max. $c^T x$
- nepřípustná úloha LP.. nemá příp. řeš.
- neomezená - má příp. řeš. s
libovolně velkou $c^T x$

NEJKRATŠÍ CESTA

VSTUP: $G = (V, E)$ $c_e \geq 0 \quad \forall e \in E$

$s, t \in V$
VÝSTUP: cesta z s do t ... $C \subseteq E$

CÍL: $\min \sum_{e \in C} c_e$

celočíselný program

..LP s dodatečným omezením
 $\vec{x} \in \mathbb{Z} \quad (\mathbb{N})$