

Domácí cvičení 7

Funkce dvou proměnných - Vrstevnicové grafy
15. 11. 2023

Zakreslete a popište vrstevnici ke grafu funkce

- a) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 3x$ v řezu rovinou $z = \frac{7}{4}$
- b) $f(x, y) = 4x^2 + 9y^2$ v řezu rovinou $z = 36$
- c) $f(x, y) = \frac{2x-3}{yx-y}$ v řezu rovinou $z = 1$
- d) $f(x, y) = \frac{x^2-2y}{x-y}$ v řezu rovinou $z = 3$
- e) $f(x, y) = \frac{2x-4}{x^2+y^2-4}$ v řezu rovinou $z = 1$.
- f) $f(x, y) = \frac{2x-5}{x^2+y^2-4}$ v řezu rovinou $z = 1$.
- g) $f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{y-x^2}}$ v řezu rovinou $z = 1$
- h) $f(x, y) = \frac{xy^2-2x^2y}{y-x-x^2}$ v řezu rovinou $z = 0$
- i) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 6y$ v řezu rovinou $z = c$, kde $c \in \mathbb{R}$ je parametr.
- j) $f(x, y) = \frac{4x}{x^2+y^2+1}$ v řezu rovinou $z = c$, kde $c \in \mathbb{R}$ je parametr.

Výsledky:

- a) $(x + \frac{3}{2})^2 + y^2 = 4$ - kružnice se středem v bodě $[-\frac{3}{2}, 0]$ a poloměrem 2.
(graf funkce je rotační paraboloid)
- b) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ - elipsa se středem v bodě $[0, 0]$ a poloosami délek 3 a 2.
(graf funkce je eliptický paraboloid)
- c) $y = \frac{2x-3}{x-1}$ - hyperbola s asymptotami $y = 2$ a $x = 1$ s vyloučením bodu $[\frac{3}{2}, 0]$.
- d) $y = 3x - x^2$ - parabola s vyloučením bodů $[0, 0]$ a $[2, 2]$.
- e) $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ - kružnice se středem v bodě $[1, 0]$ a poloměrem 1 s vyloučením bodu $[2, 0]$.
- f) vrstevnicí je bod $[1, 0]$, rovina $z = 1$ protíná graf funkce f pouze v jediném bodě (tj. $f(1, 0) = 1$)
- g) $x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ - kružnice se středem v bodě $[0, \frac{1}{2}]$ a poloměrem $\frac{1}{2}$ s vyloučením bodu $[0, 0]$.
- h) přímky $x = 0$, $y = 0$ a $y = 2x$ s vyloučením bodů $[-1, 0]$, $[0, 0]$ a $[1, 2]$.
- i) rovina $z = c$ protíná graf funkce f pro $c > -10$ v kružnicích $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = c + 10$, tj. v kružnici se středem v bodě $[1, -3]$ a poloměrem $\sqrt{c + 10}$. Pro $c = -10$ je vrstevnicí bod $[1, -3]$. Pro $c < -10$ rovina neprotíná graf funkce f . (graf funkce je rotační paraboloid)
- j) rovina $z = 0$ protíná graf funkce f v přímce $x = 0$, rovina $z = c$ pro $c \in (-2, 2) \setminus \{0\}$ v kružnicích $(x - \frac{2}{c})^2 + y^2 = \frac{4}{c^2} - 1$, tj. v kružnici se středem v bodě $[\frac{2}{c}, 0]$ a poloměrem $\sqrt{\frac{4}{c^2} - 1}$. Pro $c = 2$ je vrstevnicí bod $[1, 0]$, pro $c = -2$ je vrstevnicí bod $[-1, 0]$. Pro $c < -2$ nebo $c > 2$ rovina neprotíná graf funkce f .