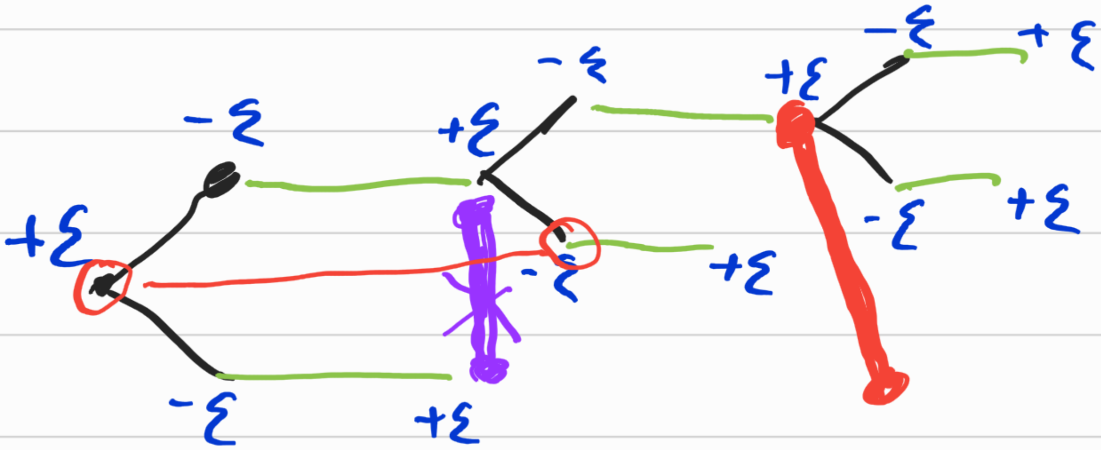
BIPARTITNÍ GRAFY - DOKONČENÍ

- střídavé stromy
- změna duálního řešení y

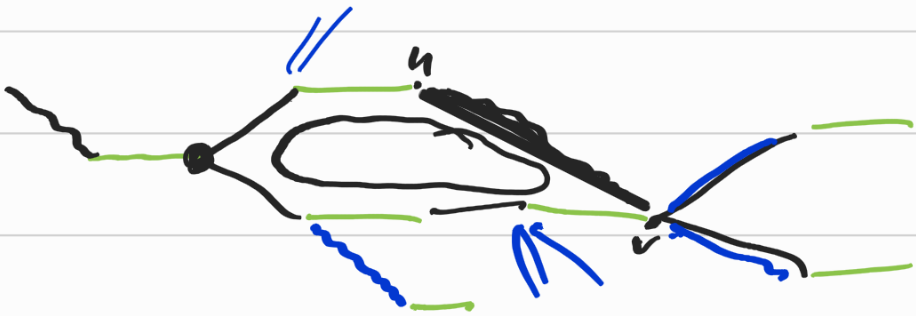


$\boxed{V}$ ALG. najde optimální řeš. v poly. čase

__Důsl.__: Primární LP má celočíselné optimum

PERF. PÁROVÁNÍ V OBECNÝCH GRAFECH

- jen nalezení



Def: G/C ... kontrakce C v grafu G

... vrcholy v C ztotožníme

... hrany v $C \times C$ ... vypustíme

v $C \times (G \setminus C)$ ... nahradíme hranami do kontrahovaného vrcholu

Pozor: perf. párování v G/C lze rozšířit na perf. párování v G

ALG: (0) $M := \emptyset$; $G' = G$ — $B(T)$, $A(T)$

(1) r nespárovaný, $T := \{\{r\}, \emptyset, r\}$

(2) $uv \in E'$, $u \in B(T)$, $v \notin T$

… rozšíříme T

… nebo máme střídavou cestu, prohodíme $\to (1)$

(3) $uv \in E'$, $u, v \in B(T)$

$C :=$ cyklus z u a v ke společnému předch.

$G' = G'/C \quad T = T/C \quad M = M/C \quad \to (2)$

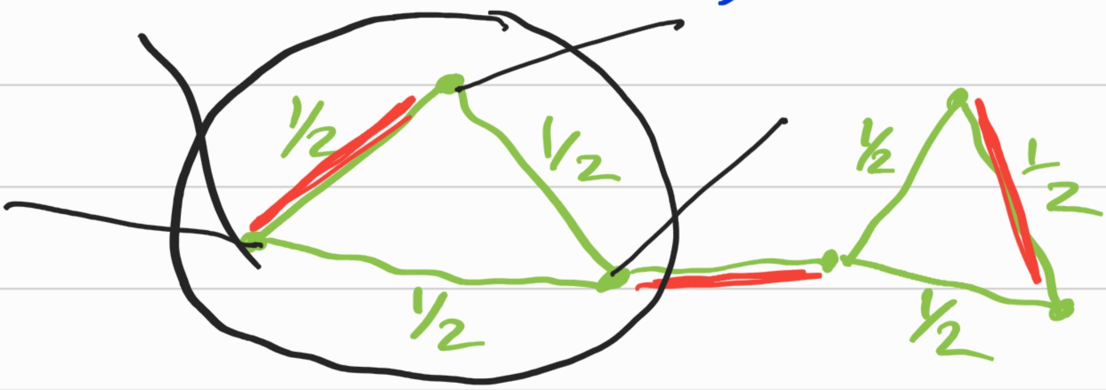
OBECNÉ GRAFY ~ Perf. pár. minimální ceny

LP: (bip.)

$$\min \sum_e c_e x_e \qquad \delta(v) = \{e \in E \mid v \in e\}$$

$$x_e \geq 0$$

$$\forall v \in V \quad x(\delta(v)) = 1$$



Def: $D \subseteq E$ je lichý řez, jestliže

$(\exists S \subseteq V)(|S| \geq 3$ je liché $\wedge D = \delta(S))$,

kde $\delta(S) = \{uv \in E \mid u \in S \wedge v \notin S\}$

LP (obecný): $\min \sum_e c_e x_e$

$$x_e \geq 0$$

$$\forall v \in V \quad x(\delta(v)) = 1 \qquad | \cdot y_v$$

$$(\forall D,\ D \text{ je lichý řez}) \quad x(D) \geq 1 \qquad | \cdot Y_D$$

Duální LP: $\max \sum_v y_v + \sum_D Y_D$

$$y_v \in \mathbb{R}$$

$$Y_D \geq 0$$

$$(\forall uv \in E) \quad y_u + y_v + \sum_{uv \in D} Y_D \leq c_{uv}$$

Def: $\bar{c}_{uv} = c_{uv} - y_u - y_v - \sum_{uv \in D} Y_D$

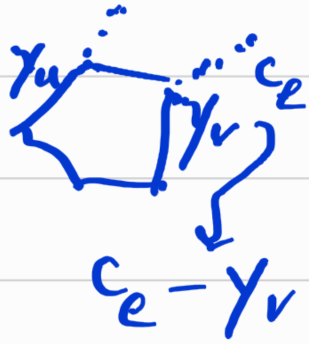
KOMPLEMENTARITA:

$$e \in M \Rightarrow \bar{c}_e = 0$$

$$Y_D > 0 \Rightarrow x(D) = 1$$

$E_= := \{e \mid \bar{c}_e = 0\}$

jakmile $Y_D > 0$, přejdeme ke grafu G/S ... $\delta(S) = D$

IDEA: Jakmile $y_D > 0$, tak kontrahujeme S, $\delta(S) = D$, nahradíme novým pseudovrcholem

potíže: • musíme při kontrakci upravit c_e, $e \in D$

• y_v pro pseudovrchol (t.j. y_D) musí být ≥ 0

⇒ nové omezení na změnu y

řešení: klesne-li na $=0$, tak pseudovrchol expandujeme

ALGORITMUS pro p.p. min ceny, obecné gr.

= G' ... kontrahovaný graf

y ... duální řešení pro G'

tj. proměnné y_v pro $v \in G'$

$y_v \geq 0$ pro pseudovrcholy

$M, T \subseteq E_=$, tj. $E_= = \{uv \in G' \mid y_u + y_v = c_{uv}\}$

(0) $y \equiv 0$, $M = \emptyset$, $G' = G$

(1) inicializujeme T

(2) $uv \in E_=$, $u \in B(T)$, $v \notin T$ ... zvětšíme $T \rightarrow (2)$

... zvětšíme $M \rightarrow (1)$

(3) $uv \in E_=$, $u, v \in B(T)$

- kontrahujeme cyklus C ... $G' = G'/C$
- $(\forall ab \in E)(a \in C \wedge b \notin C)$ $c_{ab} := c_{ab} - y_a$
- $y_w = 0$ pro w nový pseudovrchol

(4) Nechť $w \in A(T)$ pseudovrchol s $y_w = 0$

- expandujeme w

$c_{ab} = c_{ab} + y_a$ pro $a \in C$, $b \notin C$ $ab \in E$

(5) změníme y

$$y_v = \begin{cases} y_v + \varepsilon & v \in B(T) \\ y_v - \varepsilon & v \in A(T) \\ y_v & \end{cases}$$

$\varepsilon = \min z$:

$\bar{c}_{uv}$ $u \in B(T)$, $v \notin T$

$\bar{c}_{uv}/2$ $u, v \in B(T)$

y_w $w \in A(T)$ w pseudovrchol

V ALG. najde optimum v poly. čase.