Extrémy funkcí

Lokální extrémy (ostré)

Funkce f má v bodě $a \in D_f$ ostré lokální minimum, jestliže existuje takové okolí bodu a, že pro všechny body z tohoto okolí platí $f(x) > f(a)$.

Funkce f má v bodě $b \in D_f$ ostré lokální maximum, jestliže existuje takové okolí bodu b, že pro všechny body z tohoto okolí platí $f(x) < f(b)$.

Nutná podmínka existence lokálního extrému

Má-li funkce f v bodě $c \in D_f$lokální extrém, pak buď derivace $f'(c)$neexistuje, anebo existuje a je $f'(c) = 0$.

Pozor! Věta neplatí obráceně. Již bylo zmíněno dříve.

Tzn., je-li derivace v bodě nulová, nemusí být v tomto bodě extrém. Např. funkce $f(x) = x^3$ má v bodě x = 0 derivaci f´(0) = 0 a je na celém definičním oboru rostoucí.

Musí nejdříve nastat změna znaménka a teprve potom zjišťujeme, zda je derivace nulová, jak je popsáno v postačujících podmínkách existence extrému:

Postačující podmínky existence lokálního extrému

1. Nechť funkce f je spojitá na definičním oboru D_f a bod $c \in D_f$je bod, ve kterém může nastat lokální extrém.
   Potom existuje-li takové okolí bodu c, že $f'(c) > 0$ pro levé okolí bodu c a $f'(c) < 0$ pro pravé okolí bodu c, pak má funkce f v bodě c lokální maximum.
   Existuje-li takové okolí bodu c, že $f'(c) < 0$ pro levé okolí bodu c a $f'(c) > 0$ pro pravé okolí bodu c, pak má funkce f v bodě c lokální minimum.

2. Nechť $f'(c) = 0$ a v bodě c existuje druhá derivace $f''(c)$.
   Je-li $f''(c) > 0$, pak má funkce f v bodě c ostré lokální minimum, je-li $f''(c) < 0$, pak má funkce f v bodě c ostré lokální maximum.

Konvexní a konkávní funkce, inflexní body

Uvažujme funkci f, která je spojitá na intervalu $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ a má v každém bodě intervalu $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ druhou derivaci.

Potom platí: Jestliže $f''(x) \geq 0$ pro všechna $x \in (a, b)$, potom funkce f je konvexní na intervalu $\langle a, b \rangle$.

Jestliže $f''(x) \leq 0$ pro všechna $x \in (a, b)$, potom funkce f je konkávní na intervalu $\langle a, b \rangle$.

Nutná podmínka existence inflexního bodu:

Je-li bod $d \in D_f$ inflexním bodem, potom druhá derivace v tomto bodě je rovna nule.

Pozor! Věta neplatí obráceně.

Tzn., je-li druhá derivace v bodě nulová, nemusí být v tomto bodě extrém.

Např. funkce $f(x) = x^4$ má v bodě x = 0 derivaci f´´(0) = 0 a bod x = 0 není inflexním bodem, v tomto bodě nastává lokální minimum.

Musí nejdříve nastat změna znaménka druhé derivace a teprve potom zjišťujeme, zda je derivace nulová, jak je popsáno v postačujících podmínkách existence inflexního bodu:

Postačující podmínka existence inflexního bodu

Nechť funkce f je spojitá na definičním oboru D_f a bod $d \in D_f$ je bod, který může být inflexním bodem.

Potom existuje-li takové okolí bodu d, že pro levé okolí bodu d je funkce konkávní, tj. $f''(c) \leq 0$, a pro pravé okolí bodu d je funkce konvexní, tj. $f''(c) \geq 0$, pak bod d je inflexním bodem.
Stejně tak existuje-li takové okolí bodu d, že pro levé okolí bodu d je $f''(c) \geq 0$, tedy funkce je konvexní, a pro pravé okolí bodu d je $f''(c) \leq 0$, tedy funkce je konkávní, pak bod d je inflexním bodem.

Funkce sudá, lichá

Nechť funkce je definována v definičním oboru D_f.
Funkce f je sudá funkce na D_f, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $f(-x) = f(x)$

Funkce f je lichá funkce na D_f, jestliže pro každé $x \in D_f$ platí $f(-x) = -f(x)$

Platí: a) pokud obě funkce jsou sudé (liché), pak jejich součtem, respektive rozdílem, opět získáme funkci sudou (lichou)

b) součinem nebo podílem dvou sudých nebo dvou lichých funkcí získáme vždy funkci sudou. Pokud jedna z nich je sudá a jedna lichá, pak součinem (podílem) získáme funkci lichou.

c) složením dvou funkcí, přičemž jak vnitřní, tak vnější jsou liché funkce, získáme funkci lichou, v ostatních případech získáme funkci sudou (sudá - sudá, lichá - sudá, sudá – lichá).

Př. $f(x) = x^4 + 3x^2$ je funkce sudá (součet sudých funkcí)

$f(x) = cosx^3$ je funkce sudá (vnitřní je lichá, vnější sudá)

$f(x) = \frac{-x}{1+x^4}$ je funkce lichá (podíl liché a sudé funkce)

$f(x) = 1 + sin^3x$ funkce není ani sudá ani lichá (1 představuje posun, druhý sčítanec je funkce lichá)

$f(x) = x^3 - x$ je funkce lichá (rozdíl dvou lichých funkcí)

Průběh funkce

Předchozí poznatky lze využít pro sestrojení grafu funkce.

minimalistická verze

Co je potřeba znát, abychom sestrojili graf:

1. určení D_f
2. určení f´a ze znamének derivace určení, kdy funkce roste, klesá a kde jsou případné extrémy
3. určení limit (případně funkčních hodnot) v krajních bodech definičního oboru a výpočet funkčních hodnot v extrémech.

Příklad:

Sestrojte graf funkce

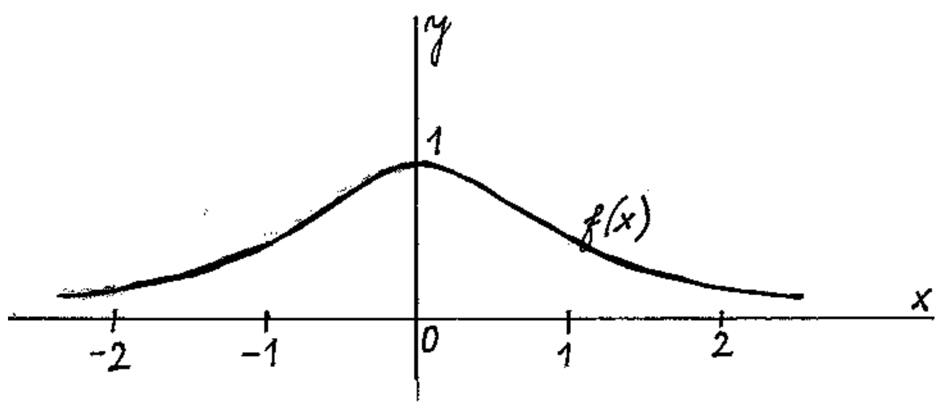
$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

1. $D_f = (-\infty. +\infty)$
2. $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$ $\quad f'(x) > 0$ pro $x \in (-\infty, 0) \Rightarrow$ funkce roste

   $f'(x) < 0$ pro $x \in (0, \infty) \Rightarrow$ funkce klesá

   $f'(x) = 0$ pro $x = 0 \Rightarrow$ v bodě $x = 0$ je maximum
3. $f(0) = 1, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Pzn. Funkce je sudá. Můžeme zjednodušit řešení úlohy na intervalu $\langle 0, +\infty)$. Výsledný graf je získaný z grafu sestrojeného na $\langle 0, +\infty)$ a k němu souměrně sdruženému podle osy y .



Asymptoty grafu funkce

Asymptota se směrnicí (asymptotou rozumíme přímku, kterou můžeme považovat za „tečnu k funkci“ v nekonečnu).

Jestliže existují limity $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = k$ a limita $\lim_{x \to \infty} (f(x) - k.x) = q$, potom přímka o rovnici $y = k.x + q$ je asymptotou grafu funkce f v nekonečnu.

Totéž platí i pro limity $x \to -\infty$.

Kromě asymptoty se směrnicí existují **vertikální a horizontální asymptoty** grafu.

Jestliže funkce f má ve vlastním bodě a aspoň jednu jednostrannou nevlastní limitu, nazýváme přímku o rovnici $x = a$ vertikální asymptotou grafu funkce f.

Např. graf funkce $f(x) = \frac{1}{x^2}$ má vertikální asymptotu x = 0, tj. osu y.

Jestliže funkce f má v nevlastním bodě vlastní limitu (např. pro limitu kde $x \to \infty$ $\lim_{x \to \infty} f(x) = b \in R$), nazýváme přímku $y = b$ horizontální asymptotou grafu funkce f v $\pm\infty$. Tuto asymptotu nazýváme asymptotou bez směrnice.

Např. graf funkce $f(x) = \frac{1}{x^2}$ má jednu horizontální asymptotu y = 0, graf funkce $f(x) = arctgx$ má dvě horizontální asymptoty $y = \pm\frac{\pi}{2}$.

Příklad:

Určete asymptoty ke grafu funkce $f(x) = \frac{x^2+1}{x+3}$

$$D_f = (-\infty, -3) \cup (-3, \infty)$$

$$a_1 : x = -3$$

$$a_2 : y = kx + q$$

$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2+1}{x.(x+3)} = 1$ (možno použít dvakrát l´Hospitalovo pravidlo)

$$q = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + 1}{(x + 3)} - x = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 - 3x}{x + 3} = -3$$

$$a_2 \colon y = x - 3$$

Průběh funkce

Minimalistická verze

Co je potřeba znát, abychom sestrojili graf:

1. Určíme D_f.
2. Vypočítáme první derivaci f´(x) a ze znamének derivace určíme, kdy funkce roste, klesá a kde jsou případné extrémy.
3. Vypočítáme limity (případně funkční hodnoty) v krajních bodech definičního oboru a vypočítáme funkční hodnoty v extrémech.

Sestrojení přesnějšího grafu funkce

Pro sestrojení je doporučen následující postup:

1. Určíme D_f a speciální vlastnosti funkce (sudá, lichá, periodická), pokud je funkce má.
2. Vyšetříme spojitost funkce a určíme limity (popřípadě jednostranné) v bodech nespojitosti a v bodech ±∞, pokud tyto body jsou součástí definičního oboru.
3. Určíme průsečíky s osami souřadnicového systému.
4. Vypočítáme první derivaci funkce f´(x) a pomocí ní určíme, kde funkce roste, klesá a kde má lokální extrémy. Též určíme funkční hodnoty v extrémech.
5. Vypočítáme druhou derivaci funkce f´´(x) a pomocí ní určíme, kde je funkce konkávní, konvexní a zjistíme, zda má inflexní body.
6. Vyšetříme, zda má graf funkce asymptoty.
7. Na základě předchozích výsledků sestrojíme graf funkce a z něho určíme obor hodnot H_f.

Příklad:

Vyšetřete průběh funkce: $\boldsymbol{f(x) = e^{\frac{-1}{x}}}$.

1. $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

   $f(-x) = e^{\frac{1}{x}} \neq \pm e^{\frac{-1}{x}}$ funkce není sudá ani lichá, není ani periodická

2. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{\frac{-1}{x}} = e^0 = 1$, $\lim\limits_{x \to 0+} e^{\frac{-1}{x}} = \text{"}e^{-\infty}\text{"} = 0$, $\lim\limits_{x \to 0-} e^{\frac{-1}{x}} = \text{"}e^{+\infty}\text{"} = \infty$.

   Znalost limit je podstatná při sestrojení grafu funkce. Limity nám navíc určují, že graf naší funkce má vertikální i horizontální asymptotu.

3. Průsečíky s osami nejsou.

4. $f'(x) = e^{\frac{-1}{x}} . \frac{1}{x^2}$. První derivace je kladná v obou intervalech $(-\infty, 0), (0, \infty)$.

   Funkce na obou intervalech roste a nemá extrémy.

5. $f''(x) = e^{\frac{-1}{x}} . \frac{1}{x^2} . \frac{1}{x^2} + e^{\frac{-1}{x}} . (-2) . \frac{1}{x^3} = e^{\frac{-1}{x}} . \frac{1-2x}{x^4}$

   Znaménko druhé derivace je určeno znaménkem výrazu $1 - 2x$.

   Platí tedy: $f''(x) \geq 0 \;\; v \;\; (-\infty, 0), \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Funkce je v těchto intervalech konvexní.

   $f''(x) \leq 0 \;\; v \;\; \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$, funkce je v tomto intervalu konkávní.

   V bodě $x = \frac{1}{2}$ dochází ke změně znaménka, funkce má tedy v tomto bodě inflexi.

6. Graf funkce má dvě asymptoty, z nichž jedna je vertikální o rovnici $x = 0$ a druhá je horizontální o rovnici $y = 1$.

7. Z výsledků předchozích údajů dostáváme graf funkce, ze kterého plyne, že $H_f = (0, \infty) \setminus \{1\}$.