Limita

Limita vypovídá o tom, jak se funkce chová:

a) v nejbližším okolí bodu, tzn. jaké jsou funkční hodnoty v tomto okolí, přičemž nás nezajímá chování funkce v tomto bodě
   značíme: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L \ (L \in R)$, případně $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$
   nazýváme: vlastní limita ve vlastním bodě, případně nevlastní limita ve vlastním bodě
b) volíme-li „velmi velká“ nebo „velmi malá“ čísla, tzn., k čemu se blíží funkční hodnoty, pokud tato čísla volíme
   značíme: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = L \ (L \in R)$, případně $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$
   nazýváme: vlastní limita v nevlastním bodě, případně nevlastní limita v nevlastním bodě.

Limita, pokud existuje, je jediná.

Limity umíme počítat:

příklady:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

provedeme rozklad na kořenové činitele a po zkrácení vyjde: 4

$$\lim_{x \to 0} \frac{cos^2 x - 1}{x^2}$$

použijeme vzorec $sin^2 x + cos^2 x = 1$ a též využijeme znalosti $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1$. Vyjde: -1

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 4}{2x^3 + x + 11}$$

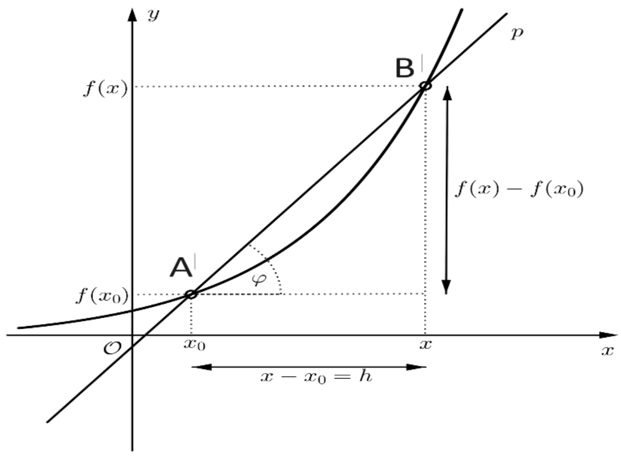
vytkneme výraz x^3 a po jeho zkrácení dostaneme výsledek: $\frac{1}{2}$

DERIVACE

Pojem derivace byl vytvořen v 2. polovině 17. století.

Derivace má zásadní význam při vyšetřování funkčních závislostí v matematice, chemii, fyzice a jiných oborech.

Uvažujme funkci f definovanou na intervalu I a nechť $x_0 \in I$ je vnitřní bod.



$\boldsymbol{tg\varphi = k_s}$, kde $\boldsymbol{k_s}$ je směrnice sečny (přímka p)

Potom směrnici sečny, která prochází body $A = [x_0, f(x_0)], B = [x, f(x)]$ vyjádříme:

$$k_s = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Pokud bude $x \longrightarrow x_0$, sečna se stane tečnou a pro směrnici tečny bude platit:

$$k = \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Existuje-li tato limita, nazýváme ji **derivací funkce f v bodě $\boldsymbol{x_0}$** a značíme: $f'(x)$.

Pro dokazování používáme substituci: $h = x - x_0$, tj. $x = x_0 + h$

Potom

$$f'(x_0) = \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Pozor! V první limitě je proměnná x, ve druhé limitě je proměnná h.

Základní vzorce pro derivování elementárních funkcí

$f(x) = x^n$	$f'(x) = n.x^{n-1}$	$x \in R$ (*pro* $n \in N$)
$f(x) = x^k$	$f'(x) = k.x^{k-1}$	$x \in R\backslash\{0\}$ (*pro* $k \in Z$)
$f(x) = x^r$	$f'(x) = r.x^{r-1}$	$x \in (0,\infty)$ (*pro* $r \in R$)
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$	$x \in R$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = cosx$	$x \in R$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -sinx$	$x \in R$
$f(x) = \mathrm{tg}\, x$	$f'(x) = \frac{1}{cos^2 x}$	$x \in R\backslash\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in Z\right\}$
$f(x) = cotg\ x$	$f'(x) = -\frac{1}{sin^2 x}$	$x \in R\backslash\{k\pi, k \in Z\}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$x \in R$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x lna$	$x \in R$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$x \in (0,\infty)$
$f(x) = log_a x$	$f'(x) = \frac{1}{x\ lna}$	$x \in (0,\infty)$
$f(x) = arcsinx$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1,1)$
$f(x) = arccosx$	$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1,1)$
$f(x) = arctgx$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$x \in R$
$f(x) = arccotgx$	$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$	$x \in R$

Pravidla pro výpočet derivací

Platí:

1. $[k.f(x)]' = k.f'(x)$, k je konstanta

2. $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

3. $[f(x).g(x)]' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$

4. $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$

5. $\left[f\left(g(x)\right)\right]' = f'\left(g(x)\right).g'(x)$

L´Hospitalovo pravidlo

Použití pro snadnější výpočet limit typu: „$\frac{0}{0}$“ a "$\frac{\pm\infty}{\infty}$"

Je-li $\lim f(x) = lim g(x) = 0$ a existuje-li $lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$

nebo

je-li $\lim f(x) = lim g(x) = \pm\infty$ a existuje-li $lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$, potom platí:

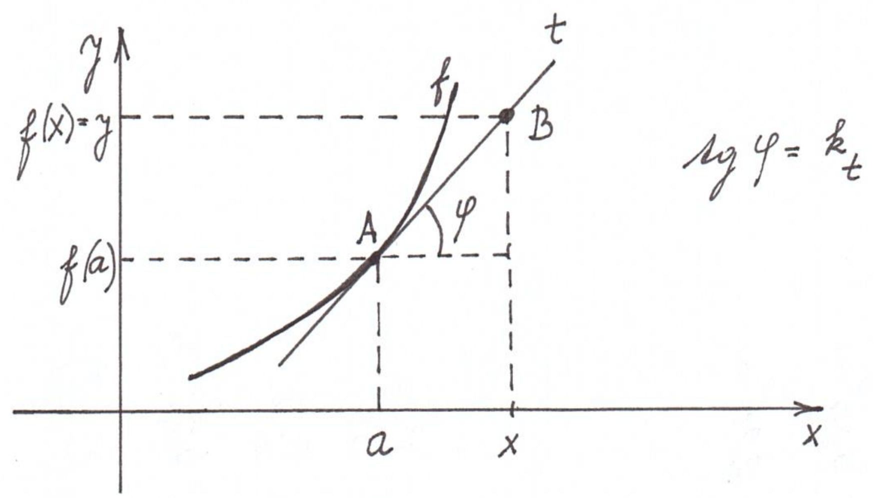
$$lim \frac{f(x)}{g(x)} = lim \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

V této větě může mít symbol lim kterýkoli z významů:

$$\lim_{x \to a} \quad \lim_{x \to a^+} \quad \lim_{x \to a^-} \quad \lim_{x \to \pm\infty}$$

Tečna ke grafu funkce

Derivace funkce v bodě $A = [a, f(a)]$ představuje směrnici tečny ke grafu funkce v tomto bodě. Bod $B = [x, y]$ je libovolný bod tečny.



$$\boldsymbol{f'(a) = tg\varphi = \frac{y - f(a)}{x - a}}$$

Analytické vyjádření této tečny lze napsat ve tvaru:

$$\boldsymbol{y - f(a) = f'(a).(x - a)}$$

Po úpravě lze získat obecnou rovnici přímky: $ax + by + c = 0$.

Monotónnost funkce a souvislost se znaménkem derivace

1. Monotónnost funkce

Funkci f nazýváme rostoucí funkcí na D_f ⟺ pro každá dvě čísla x_1, x_2 z D_f, kde $x_1 < x_2$, platí vztah $f(x_1) < f(x_2)$.

Funkci f nazýváme neklesající funkcí na D_f ⟺ pro každá dvě čísla x_1, x_2 z D_f, kde $x_1 \leq x_2$, platí vztah $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Funkci f nazýváme klesající funkcí na D_f ⟺ pro každá dvě čísla x_1, x_2 z D_f, kde $x_1 < x_2$, platí vztah $f(x_1) > f(x_2)$.

Funkci f nazýváme nerostoucí funkcí na D_f ⟺ pro každá dvě čísla x_1, x_2 z D_f, kde $x_1 \leq x_2$, platí vztah $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Nyní uvažujme funkci f, která je spojitá na intervalu$\langle a, b\rangle$ a má v každém bodě intervalu (a, b) derivaci.

Potom platí: Jestliže $f'x) > 0$ pro všechna $x \in (a, b)$, potom funkce f je

na intervalu $\langle a, b\rangle$ rostoucí.

Jestliže platí, že $f'x) \geq 0$ pro všechna $x \in (a, b)$, potom funkce f je

na intervalu $\langle a, b\rangle$ neklesající.

Jestliže platí, že $f'x) < 0$ pro všechna $x \in (a, b)$, potom funkce f je

na intervalu $\langle a, b\rangle$ klesající.

Jestliže platí, že $f'x) \leq 0$ pro všechna $x \in (a, b)$, potom funkce f je

na intervalu $\langle a, b\rangle$ nerostoucí.

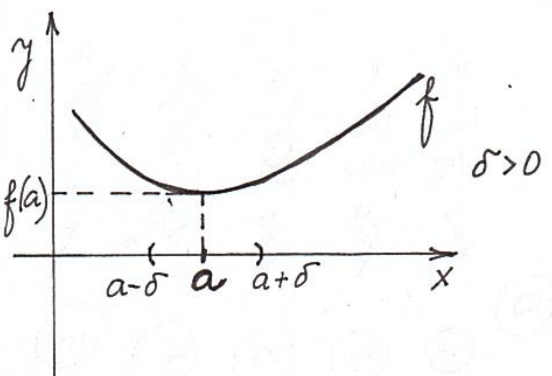
Pozor! Obrácené tvrzení neplatí.

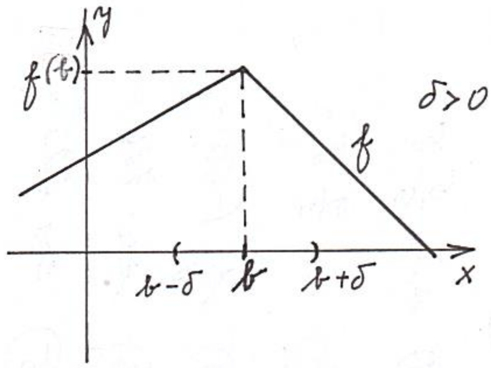
Je-li např. funkce rostoucí, derivace funkce nemusí být kladná na celém intervalu. Pro funkci $f(x) = x^3, x \epsilon R$ je f´(0)=0.

2. Lokální extrém

Funkce f má v bodě $a \in D_f$ostré lokální minimum, jestliže existuje takové okolí bodu a, že pro všechny body z tohoto okolí platí $f(x) > f(a)$.

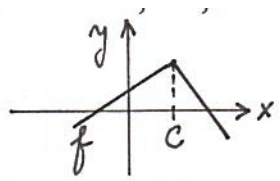
Funkce f má v bodě $b \in D_f$ ostré lokální maximum, jestliže existuje takové okolí bodu b, že pro všechny body z tohoto okolí platí $f(x) < f(b)$.

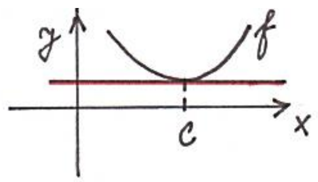




3. **Souvislost lokálního extrému a derivace:**

Jestliže funkce f má v bodě $c \in D_f$ lokální extrém, potom buď derivace $f'(c)$ neexistuje, anebo derivace existuje a je v tomto bodě nulová.





Pozor! Obrácené tvrzení neplatí.

Tzn., je-li derivace v bodě nulová, nemusí být v tomto bodě extrém. Např. funkce $f(x) = x^3$ má v bodě x = 0 derivaci f´(0) = 0 a je na celém definičním oboru rostoucí.

Derivace vyšších řádů

Má-li funkce f na intervalu I vlastní derivaci (f´), pak tato derivace je funkcí, kterou můžeme opět derivovat.

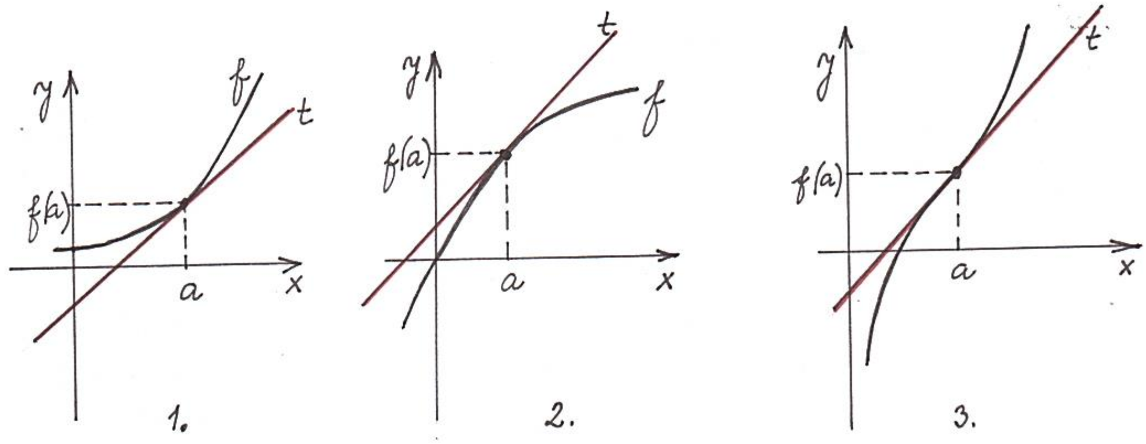
Derivaci této funkce f´ na intervalu I (pokud existuje vlastní) označujeme f´´ nebo $\frac{d^2f}{dx^2}$ a nazýváme ji druhou derivací funkce f.

Dalším derivováním, pokud lze provést, dostáváme postupně třetí, čtvrtou, atd. až obecně n-tou derivaci funkce f.

1. Konvexnost a konkávnost funkce

Uvažujme funkci, která má vlastní derivaci v bodě **a**. Sestrojíme-li tečnu ke grafu v tomto bodě, pak mohou nastat situace:

1. graf funkce v okolí bodu **a** leží „nad tečnou" V tomto případě je funkce v tomto okolí konvexní.
2. graf funkce v okolí bodu **a** leží „pod tečnou". V tomto případě je funkce v tomto okolí konkávní.
3. může nastat situace, kdy graf přechází u jedné strany tečny na druhou. V tomto případě nazýváme bod **a** inflexním bodem.



Konvexita a konkávita funkce a souvislost se znaménkem druhé derivace

Uvažujme funkci f, která je spojitá na intervalu$\langle a, b\rangle$ a má v každém bodě intervalu (a, b) druhou derivaci.

Potom platí: Jestliže $f''(x) \geq 0$ pro všechna $x \in (a, b)$, potom funkce f je konvexní na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Jestliže $f''(x) \leq 0$ pro všechna $x \in (a, b)$, potom funkce f je konkávní na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Pro inflexní bod platí:

Je-li tento bod inflexním bodem, potom druhá derivace v tomto bodě je rovna nule. Např. funkce $f(x) = x^3$ má v bodě x = 0 druhou derivaci f´´(0) = 0.

Bod x = 0 je inflexním bodem této funkce.