

ZÁKLADY STAVITELSTVÍ

4. Přednáška

Průřezové veličiny

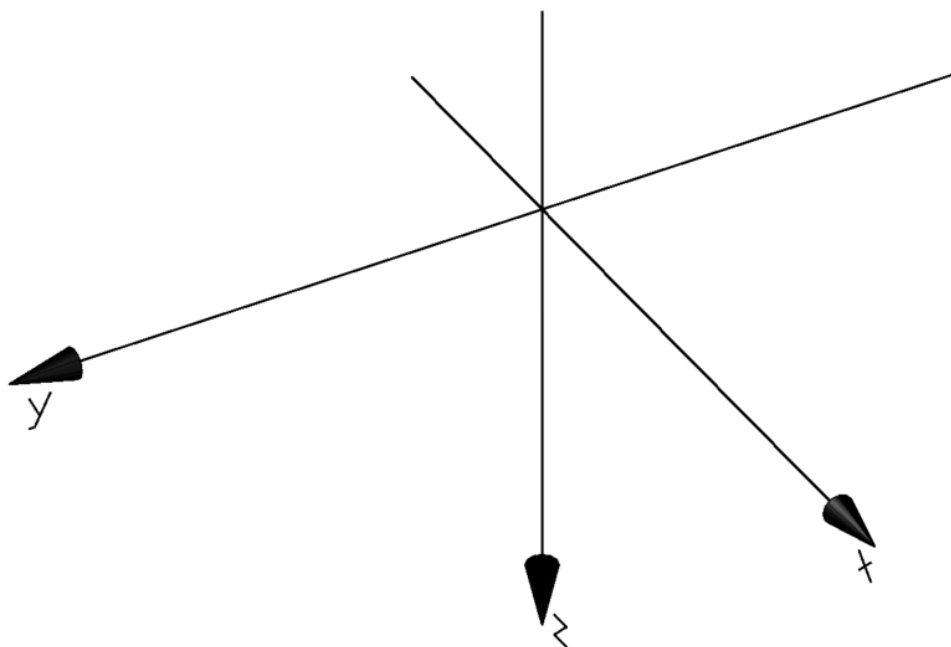
Ing. Tomáš Kadlíček, Ph.D.

OBSAH

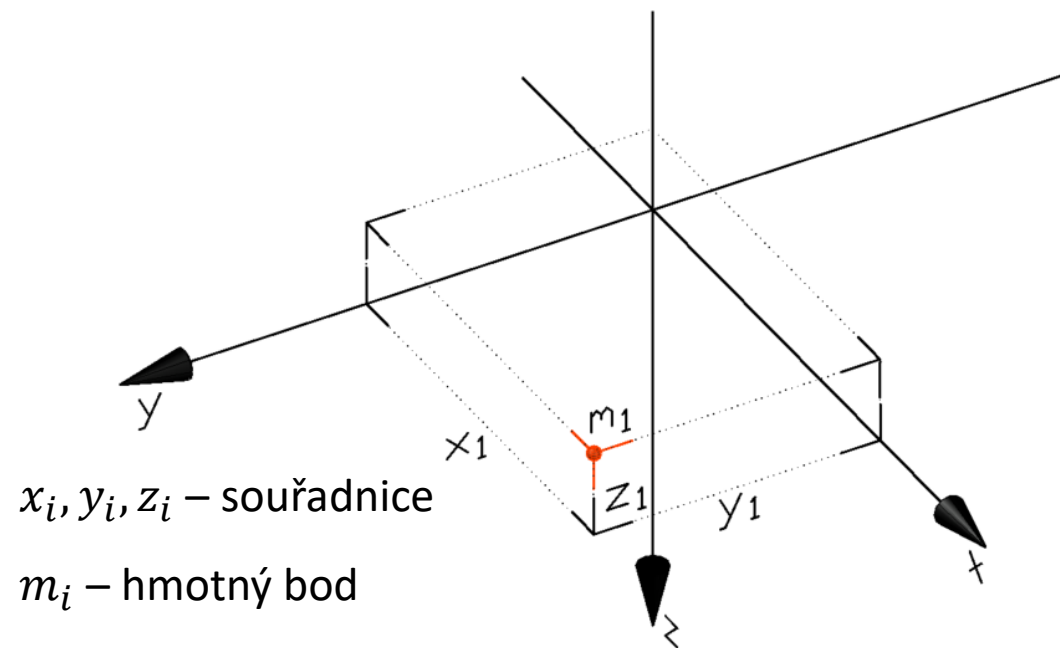
- TĚŽIŠTĚ
- MOMENT SETRVAČNOSTI
- POLOMĚR SETRVAČNOSTI

- **TĚŽIŠTĚ**
- **MOMENT SETRVAČNOSTI**
- **POLOMĚR SETRVAČNOSTI**

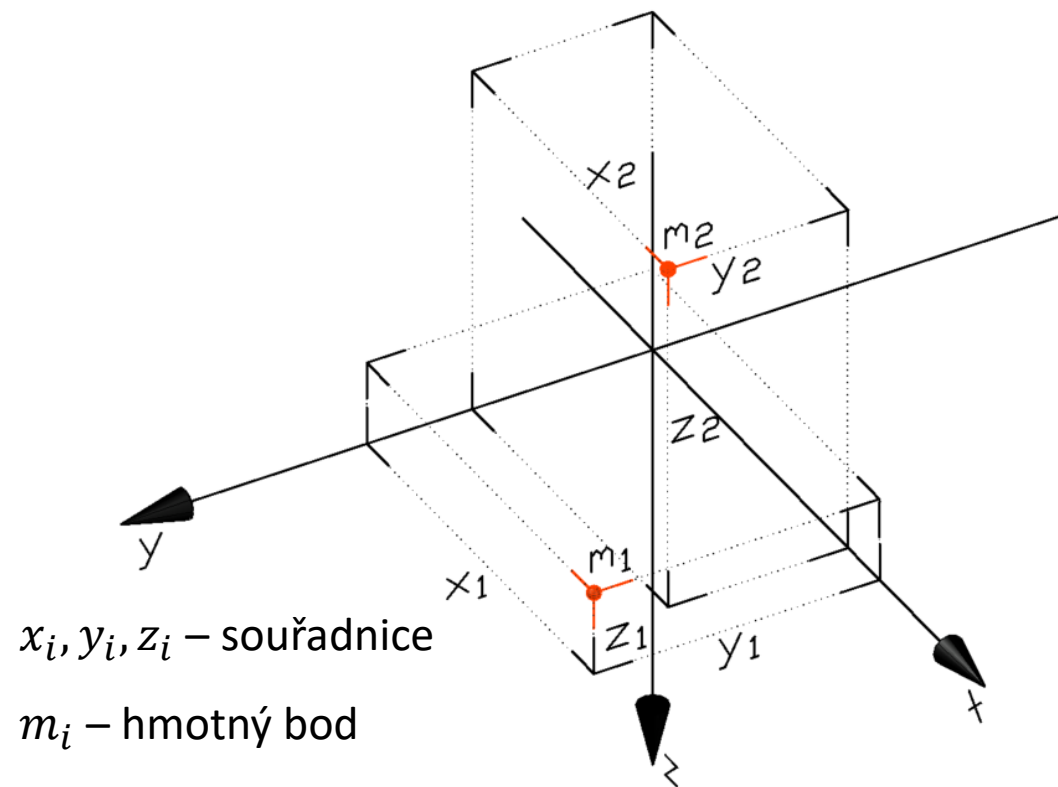
PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - TĚŽIŠTĚ



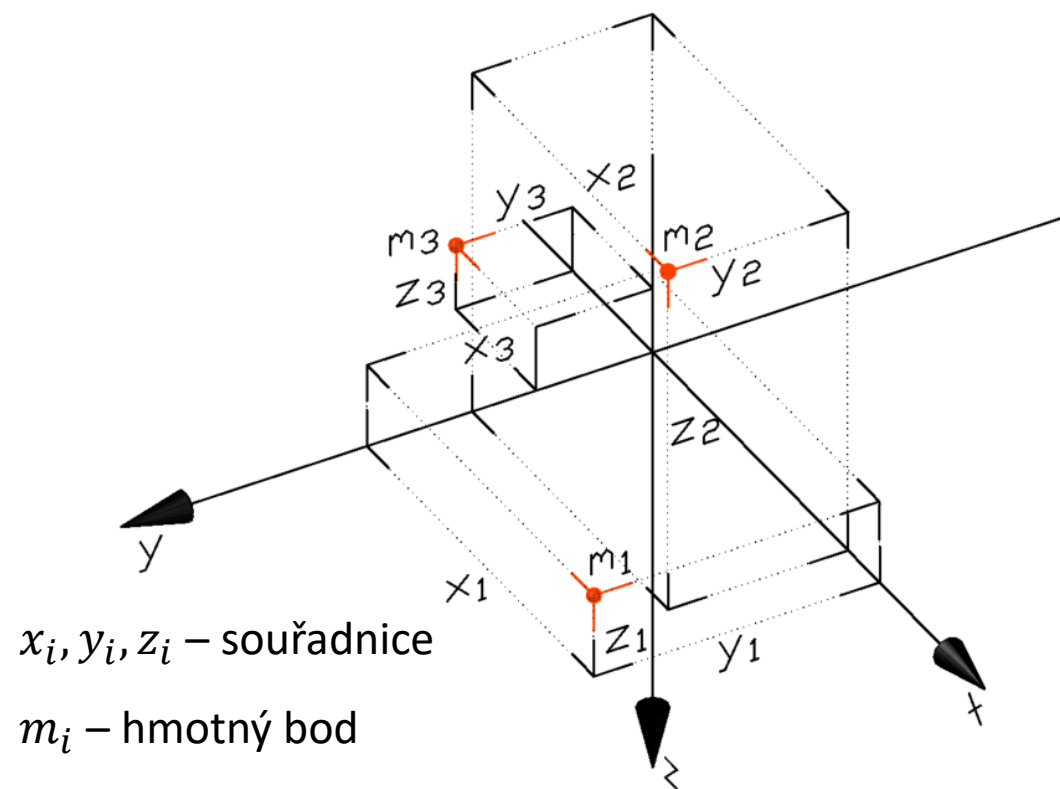
PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - TĚŽIŠTĚ



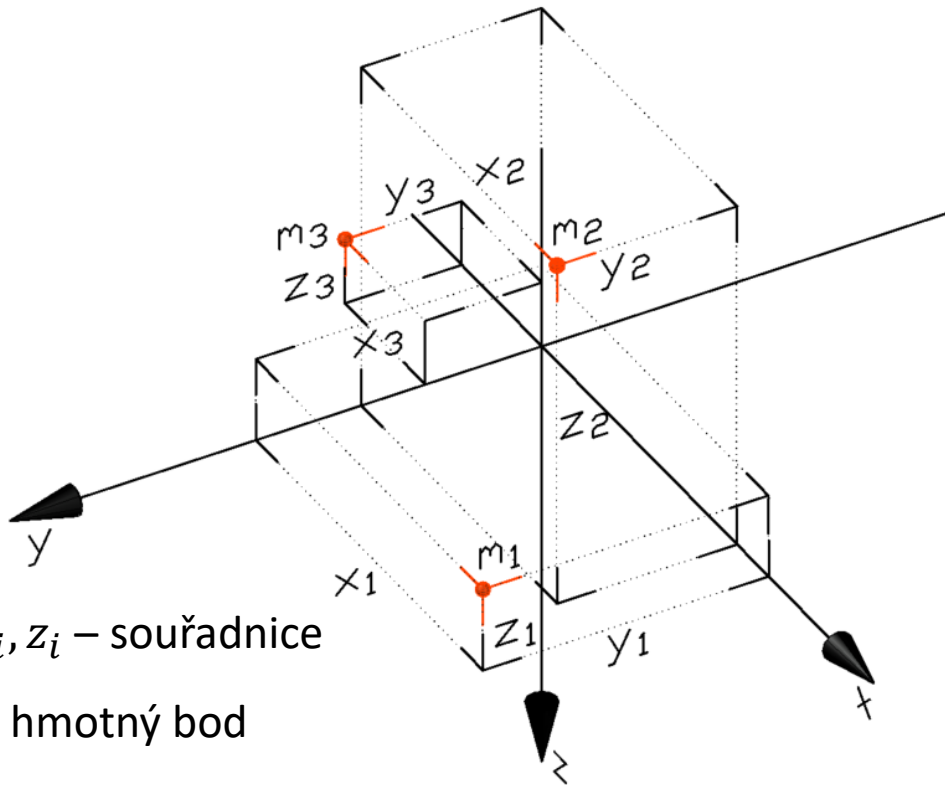
PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - TĚŽIŠTĚ



PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - TĚŽIŠTĚ



PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - TĚŽIŠTĚ



x_i, y_i, z_i – souřadnice

m_i – hmotný bod

n – počet bodů

F_i – síla

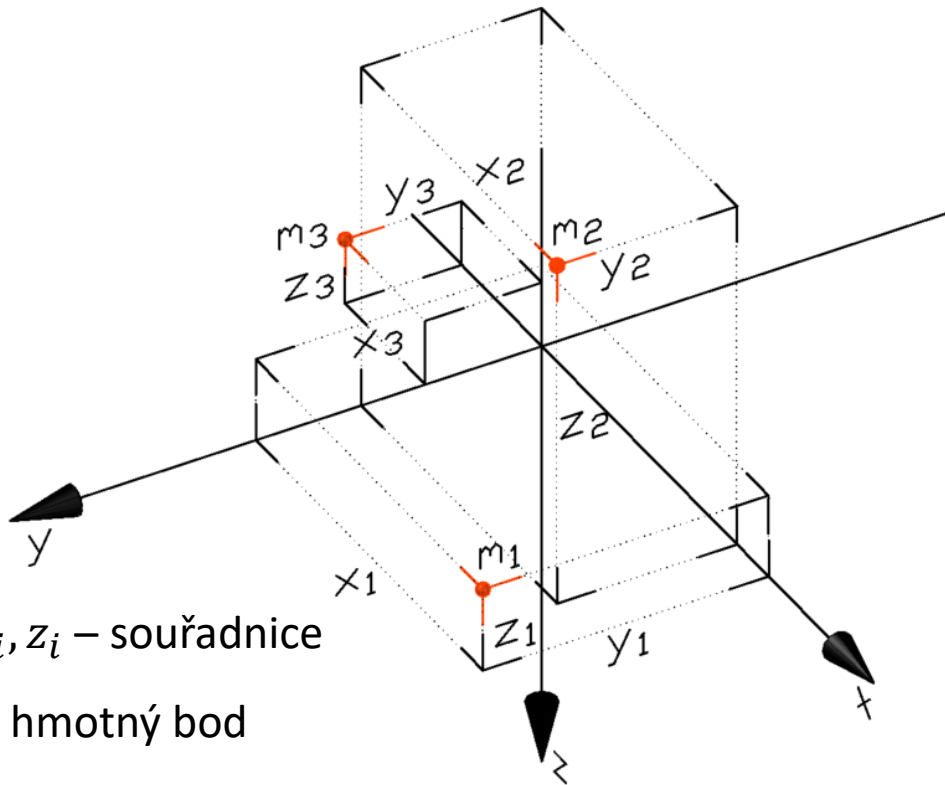
$$Fx_c = \sum_{i=1}^n F_i x_i$$

$$Fy_c = \sum_{i=1}^n F_i y_i$$

$$Fz_c = \sum_{i=1}^n F_i z_i$$

x_c, y_c, z_c – souřadnice těžiště

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - TĚŽIŠTĚ



x_i, y_i, z_i – souřadnice

m_i – hmotný bod

n – počet bodů

F_i – síla

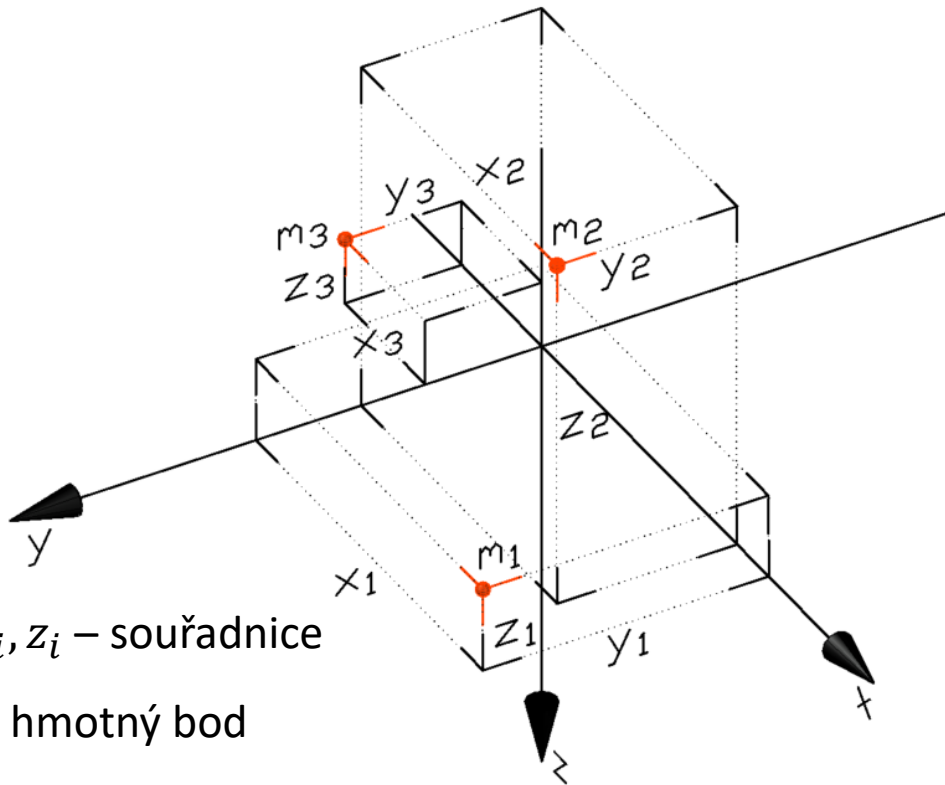
$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n F_i x_i}{\sum_{i=1}^n F_i} \quad F x_c = \sum_{i=1}^n F_i x_i$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n F_i y_i}{\sum_{i=1}^n F_i} \quad F y_c = \sum_{i=1}^n F_i y_i$$

$$z_c = \frac{\sum_{i=1}^n F_i z_i}{\sum_{i=1}^n F_i} \quad F z_c = \sum_{i=1}^n F_i z_i$$

x_c, y_c, z_c – souřadnice těžiště

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - TĚŽIŠTĚ



x_i, y_i, z_i – souřadnice

m_i – hmotný bod

n – počet bodů

F_i – síla

g – gravitace

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i g x_i}{\sum_{i=1}^n m_i g} \quad F x_c = \sum_{i=1}^n F_i x_i$$

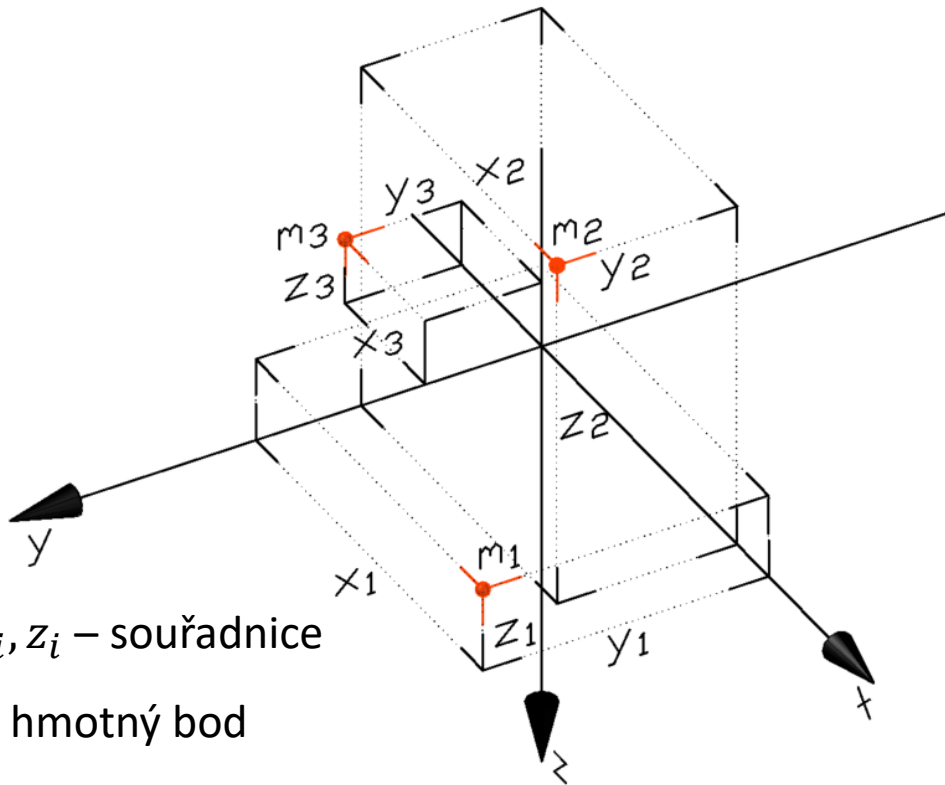
$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i g y_i}{\sum_{i=1}^n m_i g} \quad F y_c = \sum_{i=1}^n F_i y_i$$

$$z_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i g z_i}{\sum_{i=1}^n m_i g} \quad F z_c = \sum_{i=1}^n F_i z_i$$

x_c, y_c, z_c - souřadnice těžiště

$$F = mg$$

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - TĚŽIŠTĚ



x_i, y_i, z_i – souřadnice

m_i – hmotný bod

n – počet bodů

F_i – síla

g – gravitace

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad F x_c = \sum_{i=1}^n F_i x_i$$

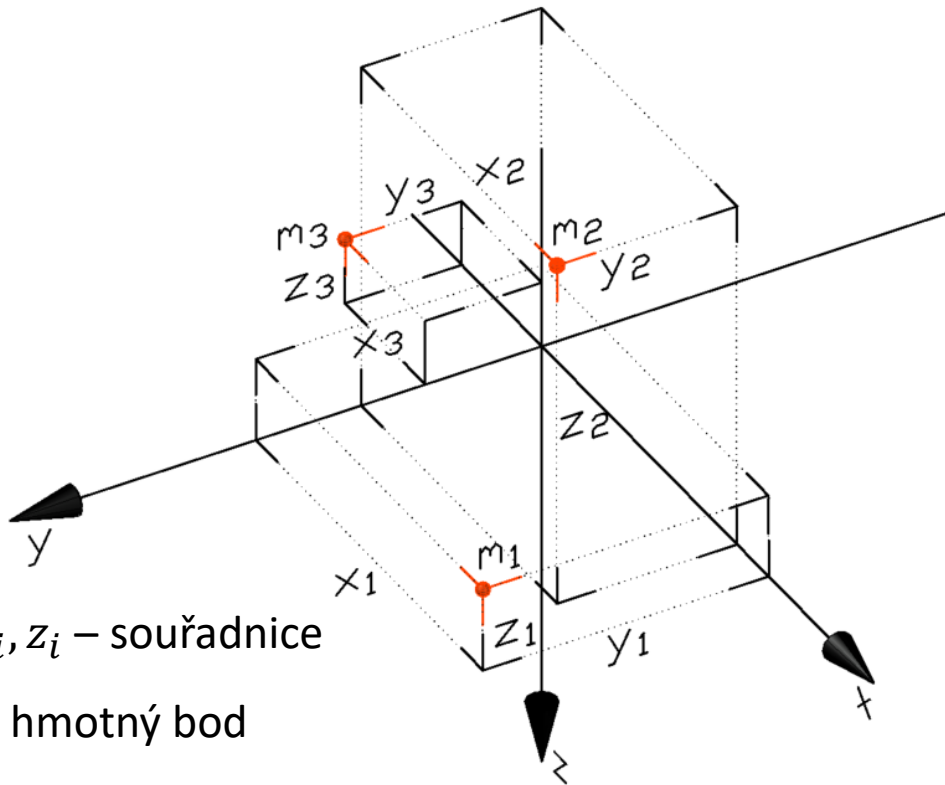
$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad F y_c = \sum_{i=1}^n F_i y_i$$

$$z_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad F z_c = \sum_{i=1}^n F_i z_i$$

x_c, y_c, z_c – souřadnice těžiště

$$F = mg$$

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - TĚŽIŠTĚ



x_i, y_i, z_i – souřadnice

m_i – hmotný bod

n – počet bodů

F_i – síla

g – gravitace

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{m} \quad F x_c = \sum_{i=1}^n F_i x_i$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{m} \quad F y_c = \sum_{i=1}^n F_i y_i$$

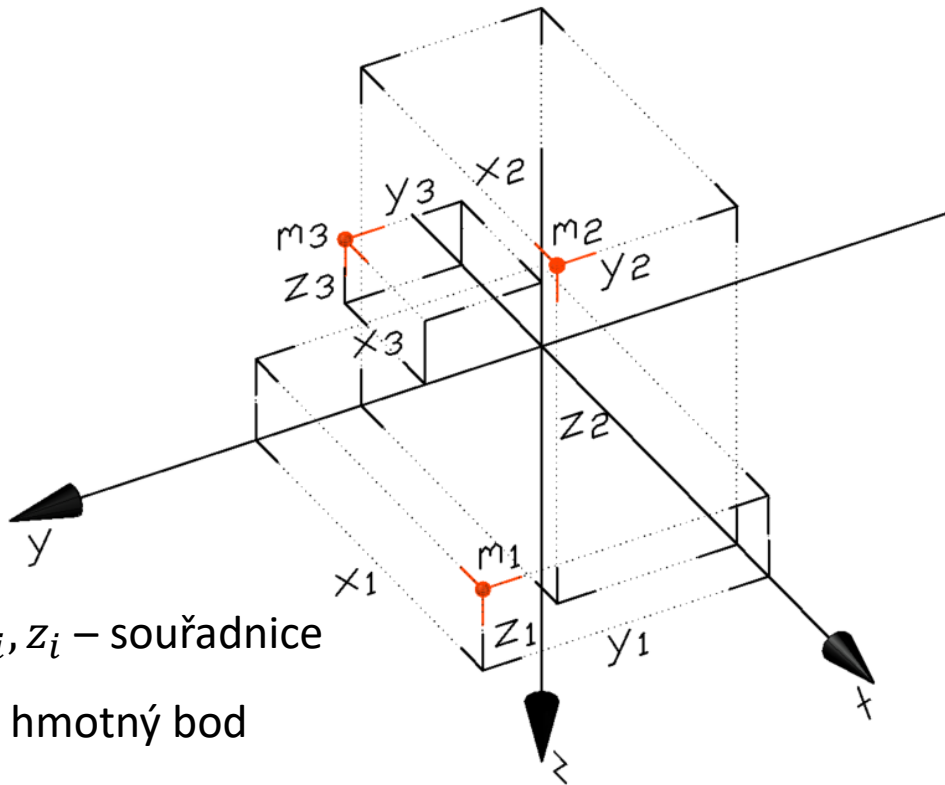
$$z_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{m} \quad F z_c = \sum_{i=1}^n F_i z_i$$

x_c, y_c, z_c – souřadnice těžiště

$$F = mg$$

$$m = \sum_{i=1}^n m_i$$

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - TĚŽIŠTĚ



x_i, y_i, z_i – souřadnice

m_i – hmotný bod

n – počet bodů

F_i – síla

g – gravitace

S_{yz}, S_{xz}, S_{xy} – Statický moment

$$x_c = \frac{S_{yz}}{m}$$

$$y_c = \frac{S_{xz}}{m}$$

$$z_c = \frac{S_{xy}}{m}$$

$$F x_c = \sum_{i=1}^n F_i x_i$$

$$F y_c = \sum_{i=1}^n F_i y_i$$

$$F z_c = \sum_{i=1}^n F_i z_i$$

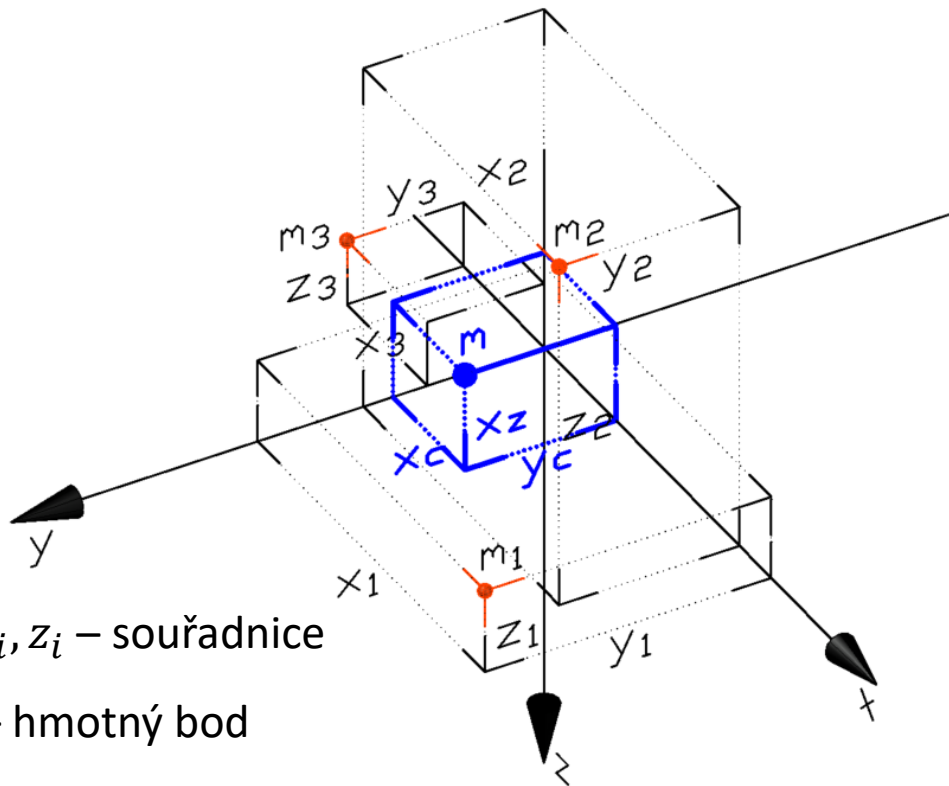
x_c, y_c, z_c – souřadnice těžiště

$$F = mg$$

$$m = \sum_{i=1}^n m_i$$

$$S_{yz} = mx$$

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - TĚŽIŠTĚ



x_i, y_i, z_i – souřadnice

m_i – hmotný bod

n – počet bodů

F_i - síla

g – gravitace

S_{yz}, S_{xz}, S_{xy} - Statický moment

$$x_c = \frac{S_{yz}}{m} \quad Fx_c = \sum_{i=1}^n F_i x_i$$

$$y_c = \frac{S_{xz}}{m} \quad Fy_c = \sum_{i=1}^n F_i y_i$$

$$z_c = \frac{S_{xy}}{m} \quad Fz_c = \sum_{i=1}^n F_i z_i$$

x_c, y_c, z_c - souřadnice těžiště

$$F = mg$$

$$m = \sum_{i=1}^n m_i$$

$$S_{yz} = mx$$

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - TĚŽIŠTĚ

Statický moment k rovině y, z

$$x_c = \frac{S_{yz}}{m}$$

$$F x_c = \sum_{i=1}^n F_i x_i$$

$$y_c = \frac{S_{xz}}{m}$$

$$F y_c = \sum_{i=1}^n F_i y_i$$

$$z_c = \frac{S_{xy}}{m}$$

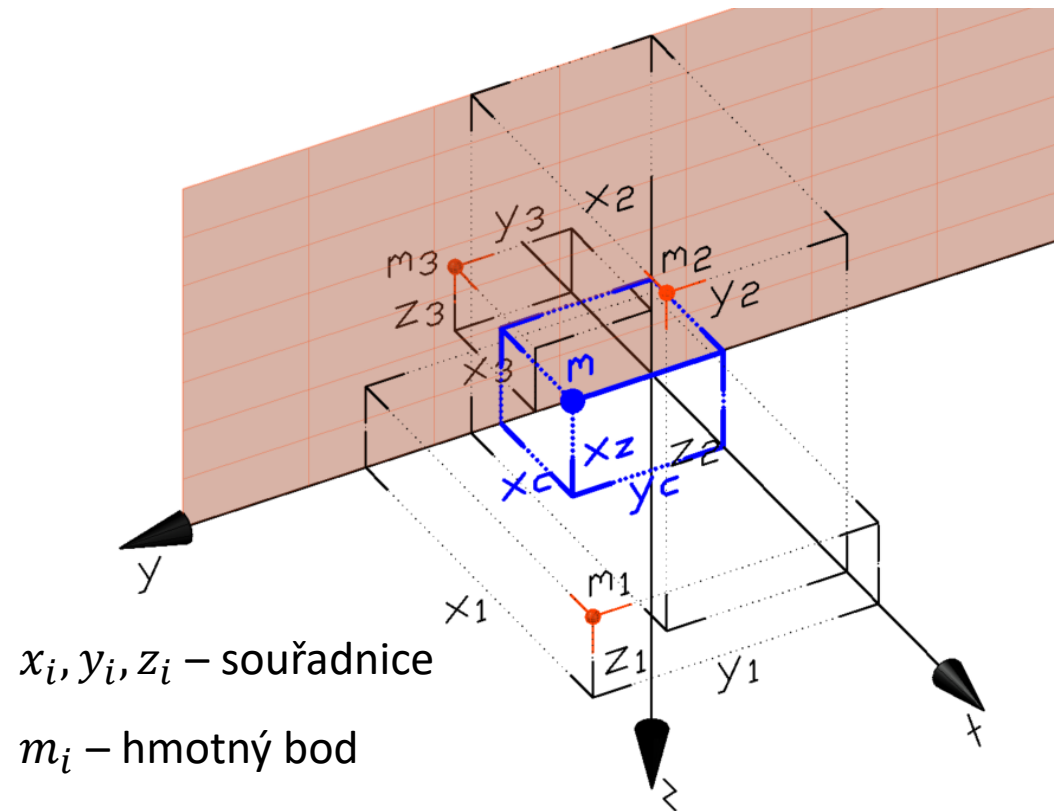
$$F z_c = \sum_{i=1}^n F_i z_i$$

x_c, y_c, z_c - souřadnice těžiště

$$F = mg$$

$$m = \sum_{i=1}^n m_i$$

$$S_{yz} = mx$$



x_i, y_i, z_i - souřadnice

m_i - hmotný bod

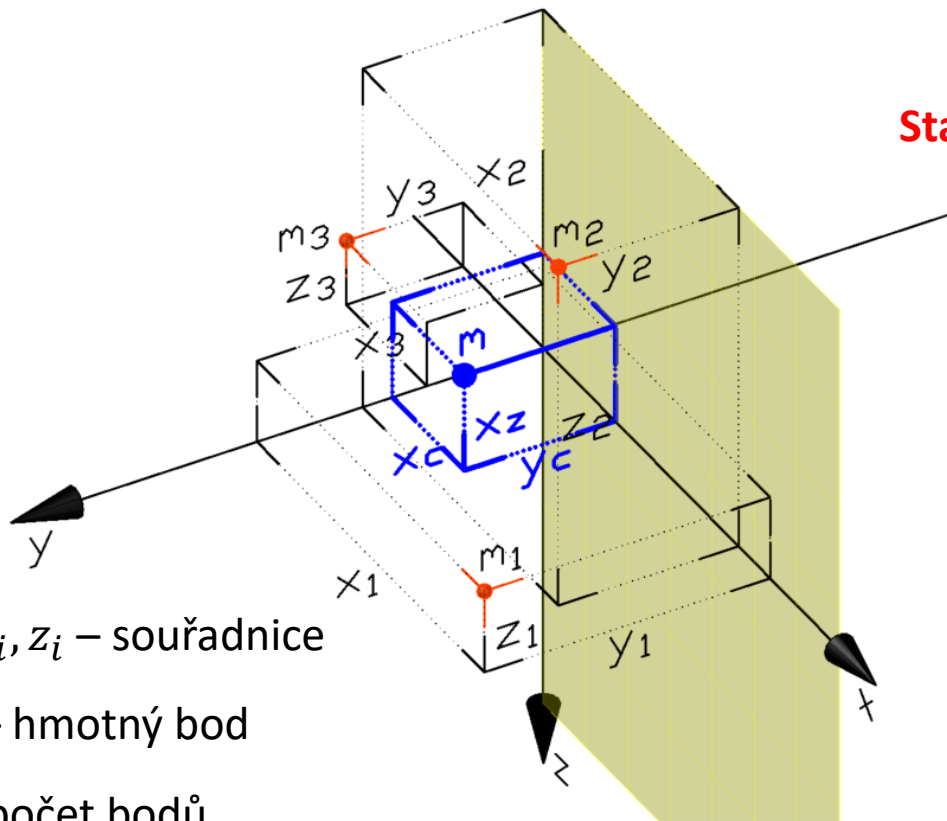
n - počet bodů

F_i - síla

g - gravitace

S_{yz}, S_{xz}, S_{xy} - Statický moment

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - TĚŽIŠTĚ



x_i, y_i, z_i – souřadnice

m_i – hmotný bod

n – počet bodů

F_i – síla

g – gravitace

S_{yz}, S_{xz}, S_{xy} – Statický moment

Statický moment k rovině x, z

$$x_c = \frac{S_{yz}}{m}$$

$$y_c = \frac{S_{xz}}{m}$$

$$z_c = \frac{S_{xy}}{m}$$

$$F x_c = \sum_{i=1}^n F_i x_i$$

$$F y_c = \sum_{i=1}^n F_i y_i$$

$$F z_c = \sum_{i=1}^n F_i z_i$$

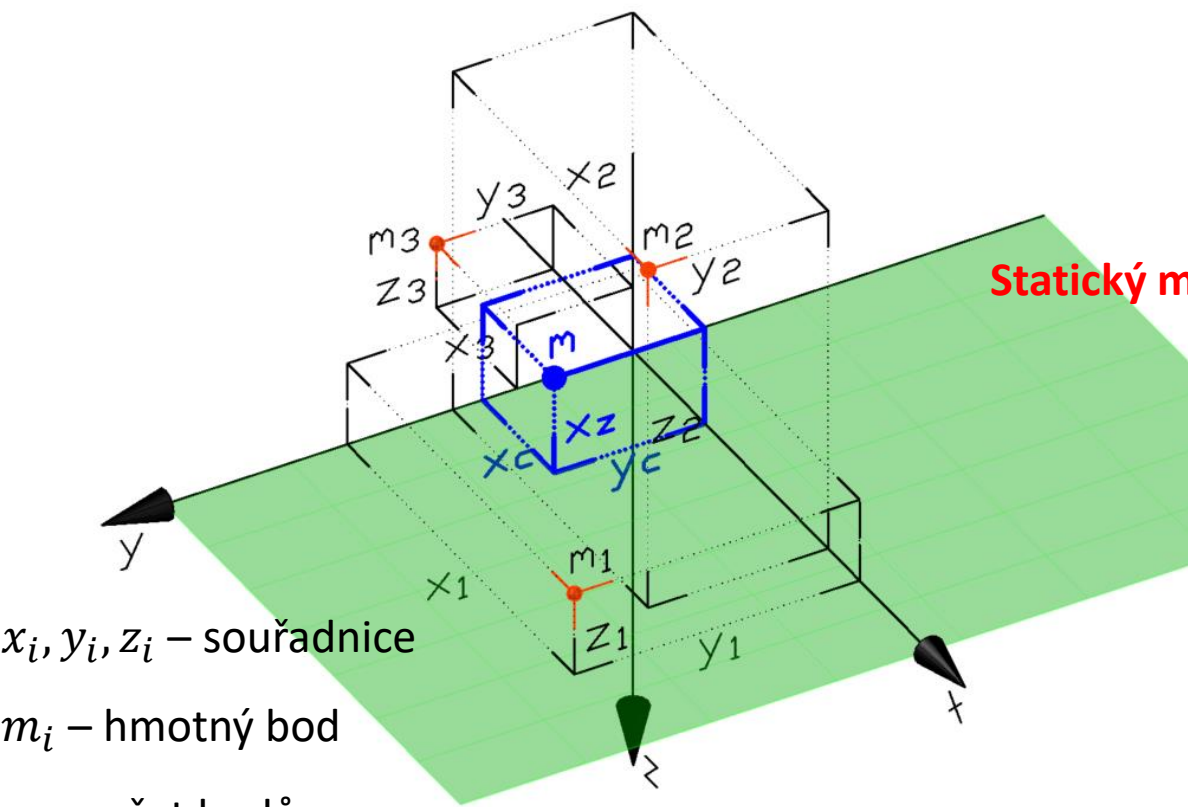
x_c, y_c, z_c – souřadnice těžiště

$$F = mg$$

$$m = \sum_{i=1}^n m_i$$

$$S_{yz} = mx$$

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - TĚŽIŠTĚ



x_i, y_i, z_i – souřadnice

m_i – hmotný bod

n – počet bodů

F_i - síla

g – gravitace

S_{yz}, S_{xz}, S_{xy} - Statický moment

$$x_c = \frac{S_{yz}}{m} \qquad Fx_c = \sum_{i=1}^n F_i x_i$$

$$y_c = \frac{S_{xz}}{m} \qquad Fy_c = \sum_{i=1}^n F_i y_i$$

$$z_c = \frac{S_{xy}}{m} \qquad Fz_c = \sum_{i=1}^n F_i z_i$$

Statický moment k rovině x, y

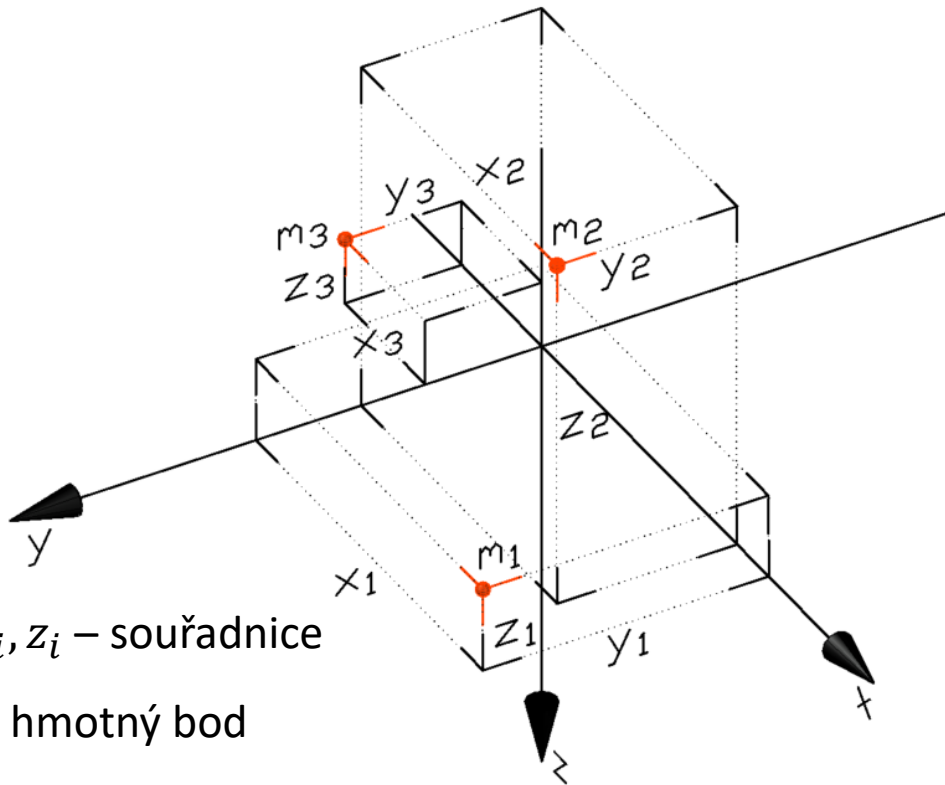
x_c, y_c, z_c - souřadnice těžiště

$$F = mg$$

$$m = \sum_{i=1}^n m_i$$

$$S_{yz} = mx$$

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - TĚŽIŠTĚ



x_i, y_i, z_i – souřadnice

m_i – hmotný bod

n – počet bodů

F_i – síla

g – gravitace

S_{yz}, S_{xz}, S_{xy} – Statický moment

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad F x_c = \sum_{i=1}^n F_i x_i$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad F y_c = \sum_{i=1}^n F_i y_i$$

$$z_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad F z_c = \sum_{i=1}^n F_i z_i$$

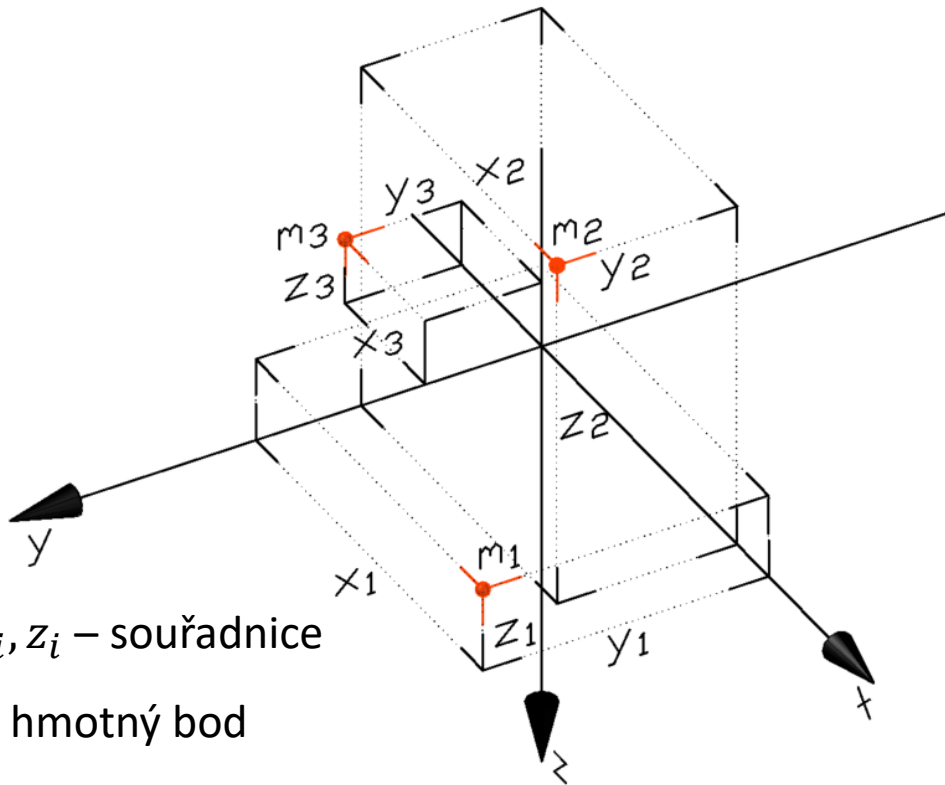
x_c, y_c, z_c – souřadnice těžiště

$$F = mg$$

$$m = \sum_{i=1}^n m_i$$

$$S_{yz} = mx$$

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - TĚŽIŠTĚ



x_i, y_i, z_i – souřadnice

m_i – hmotný bod

n – počet bodů

F_i – síla

g – gravitace

S_{yz}, S_{xz}, S_{xy} – Statický moment

V_i – objem

ρ_i – hustota

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n \rho_i V_i x_i}{\sum_{i=1}^n \rho_i V_i} \quad F x_c = \sum_{i=1}^n F_i x_i$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n \rho_i V_i y_i}{\sum_{i=1}^n \rho_i V_i} \quad F y_c = \sum_{i=1}^n F_i y_i$$

$$z_c = \frac{\sum_{i=1}^n \rho_i V_i z_i}{\sum_{i=1}^n \rho_i V_i} \quad F z_c = \sum_{i=1}^n F_i z_i$$

x_c, y_c, z_c – souřadnice těžiště

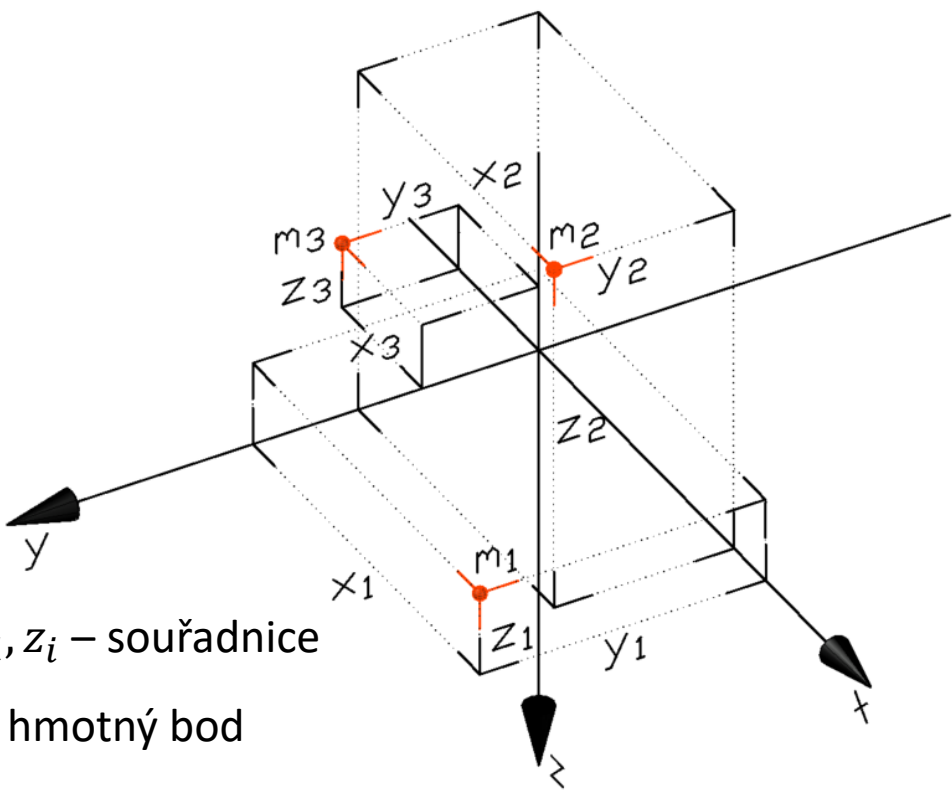
$$F = mg$$

$$m = \sum_{i=1}^n m_i$$

$$S_{yz} = mx$$

$$m = \rho V$$

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - TĚŽIŠTĚ



x_i, y_i, z_i – souřadnice

m_i – hmotný bod

n – počet bodů

F_i - síla

g – gravitace

S_{yz}, S_{xz}, S_{xy} - Statický moment

V_i – objem

ρ_i – hustota

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n V_i x_i}{\sum_{i=1}^n V_i} \quad F x_c = \sum_{i=1}^n F_i x_i$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n V_i y_i}{\sum_{i=1}^n V_i} \quad F y_c = \sum_{i=1}^n F_i y_i$$

$$z_c = \frac{\sum_{i=1}^n V_i z_i}{\sum_{i=1}^n V_i} \quad F z_c = \sum_{i=1}^n F_i z_i$$

x_c, y_c, z_c - souřadnice těžiště

$$F = mg$$

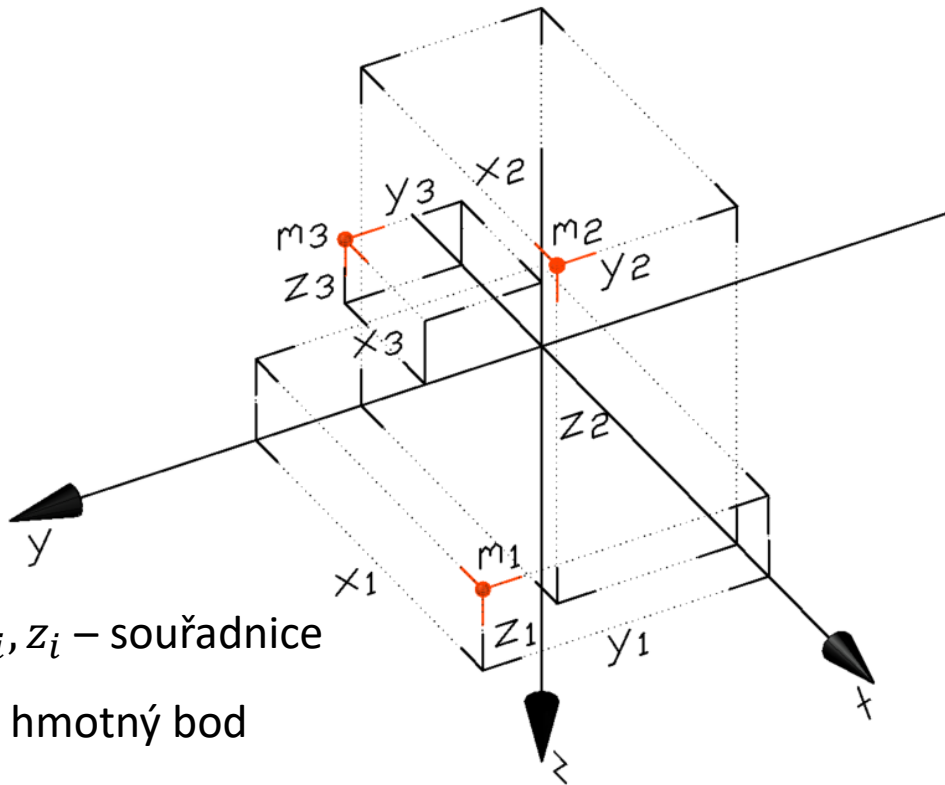
$\rho = \rho_i$

$$m = \sum_{i=1}^n m_i$$

$$S_{yz} = mx$$

$$m = \rho V$$

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - TĚŽIŠTĚ



x_i, y_i, z_i – souřadnice

m_i – hmotný bod

n – počet bodů

F_i – síla

g – gravitace

S_{yz}, S_{xz}, S_{xy} – Statický moment

V_i – objem

ρ_i – hustota

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n V_i x_i}{V} \quad F x_c = \sum_{i=1}^n F_i x_i$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n V_i y_i}{V} \quad F y_c = \sum_{i=1}^n F_i y_i$$

$$z_c = \frac{\sum_{i=1}^n V_i z_i}{V} \quad F z_c = \sum_{i=1}^n F_i z_i$$

x_c, y_c, z_c – souřadnice těžiště

$$F = mg \quad \rho = \rho_i$$

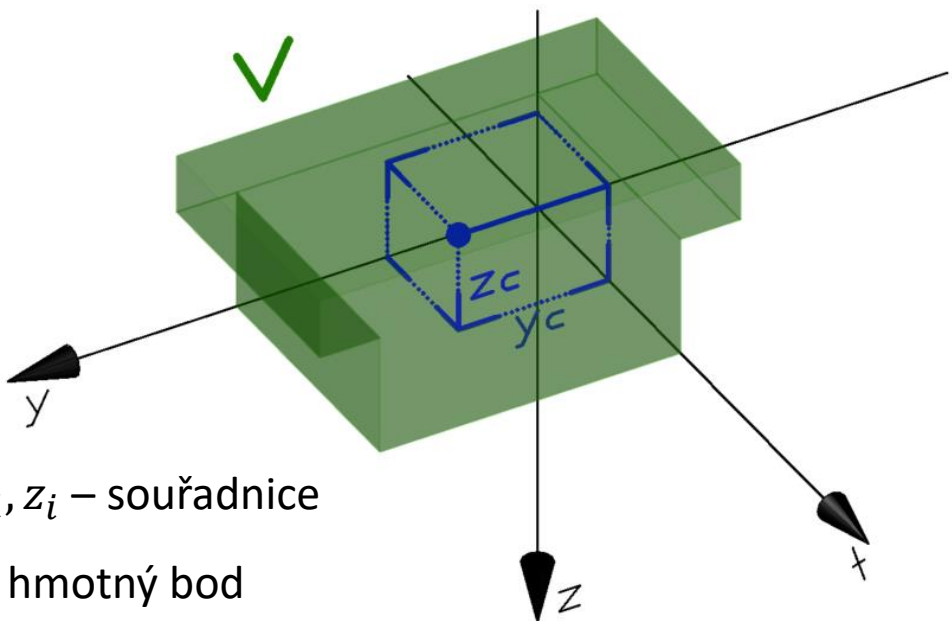
$$m = \sum_{i=1}^n m_i$$

$$V = \sum_{i=1}^n V_i$$

$$S_{yz} = mx$$

$$m = \rho V$$

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - TĚŽIŠTĚ



x_i, y_i, z_i – souřadnice
 m_i – hmotný bod
 n – počet bodů
 F_i – síla
 g – gravitace
 S_{yz}, S_{xz}, S_{xy} – Statický moment

V_i – objem
 ρ_i – hustota
 A – plocha

$$x_c = \frac{\int x dV}{V}$$

$$y_c = \frac{\int y dV}{V}$$

$$z_c = \frac{\int z dV}{V}$$

$$F x_c = \sum_{i=1}^n F_i x_i$$

$$F y_c = \sum_{i=1}^n F_i y_i$$

$$F z_c = \sum_{i=1}^n F_i z_i$$

x_c, y_c, z_c - souřadnice těžiště

$$F = mg$$

$$m = \sum_{i=1}^n m_i$$

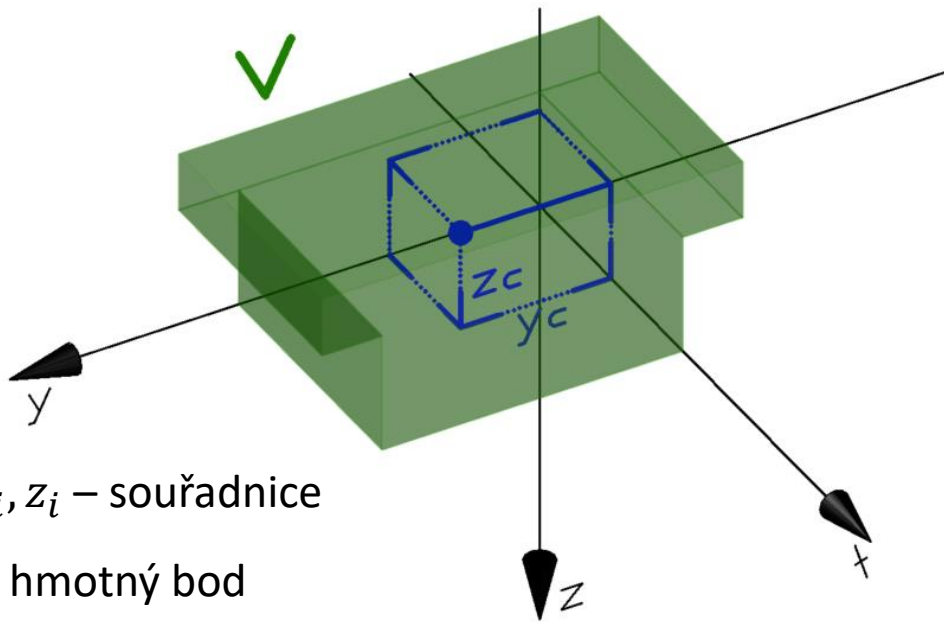
$$S_{yz} = mx$$

$$m = \rho V$$

$$\rho = \rho_i$$

$$V = \sum_{i=1}^n V_i$$

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - TĚŽIŠTĚ



x_i, y_i, z_i – souřadnice

m_i – hmotný bod

n – počet bodů

F_i – síla

g – gravitace

S_{yz}, S_{xz}, S_{xy} – Statický moment

V_i – objem

ρ_i – hustota

A – plocha

$$x_c = \frac{S_{yz}}{V}$$

$$y_c = \frac{S_{xz}}{V}$$

$$z_c = \frac{S_{xy}}{V}$$

$$F x_c = \sum_{i=1}^n F_i x_i$$

$$F y_c = \sum_{i=1}^n F_i y_i$$

$$F z_c = \sum_{i=1}^n F_i z_i$$

x_c, y_c, z_c – souřadnice těžiště

$$F = mg$$

$$\rho = \rho_i$$

$$m = \sum_{i=1}^n m_i$$

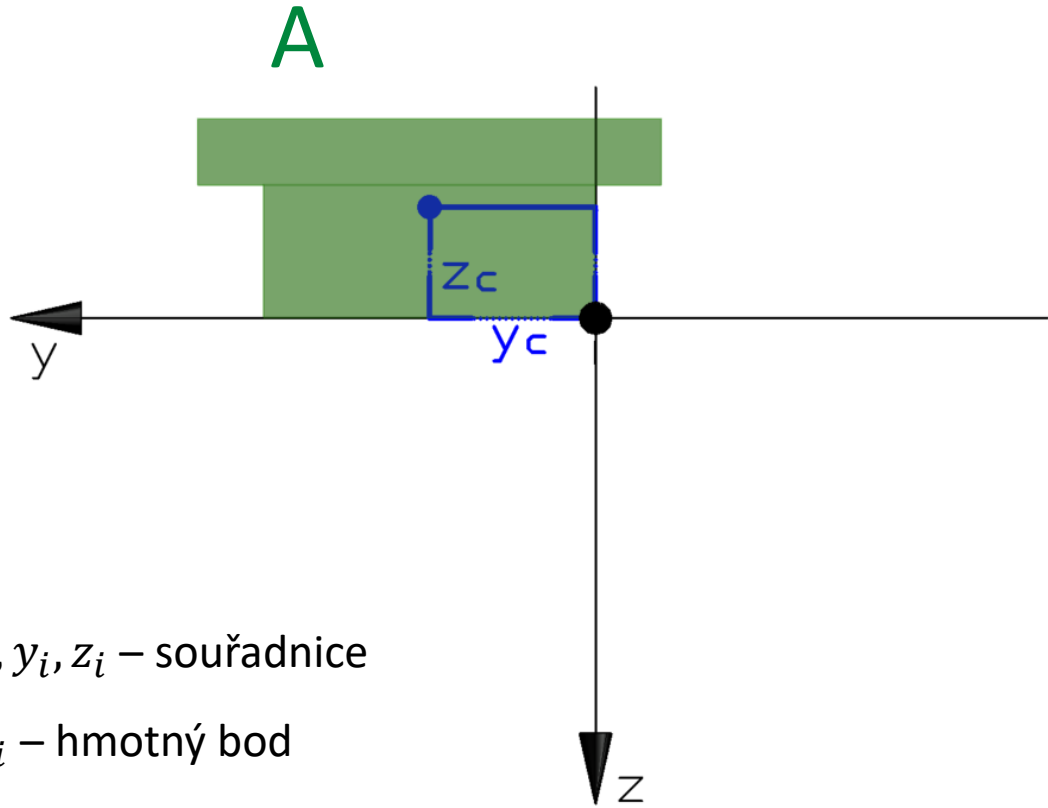
$$V = \sum_{i=1}^n V_i$$

$$S_{yz} = mx$$

$$m = \rho V$$

$$S_{yz} = \int x dV$$

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - TĚŽIŠTĚ



$$y_c = \frac{S_{xz}}{A}$$
$$z_c = \frac{S_{xy}}{A}$$

$$F y_c = \sum_{i=1}^n F_i y_i$$
$$F z_c = \sum_{i=1}^n F_i z_i$$

x_c, y_c, z_c - souřadnice těžiště

$$dx = 1$$
$$S_{xz} = \int y dA$$

x_i, y_i, z_i – souřadnice

m_i – hmotný bod

n – počet bodů

F_i - síla

g – gravitace

S_{yz}, S_{xz}, S_{xy} - Statický moment

V_i – objem

ρ_i – hustota

A – plocha

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - TĚŽIŠTĚ

Integrace obrazce - obdélník

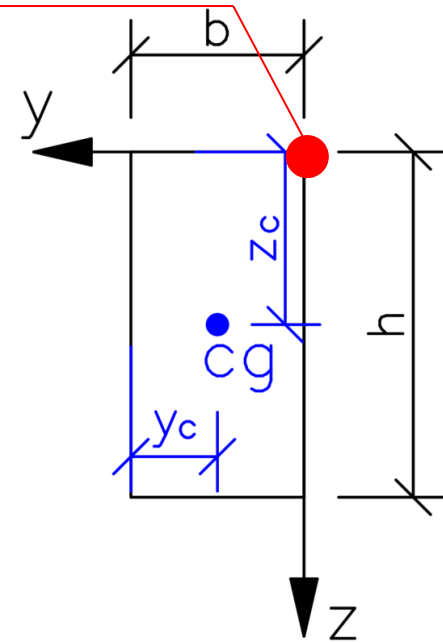
$$z_c = \frac{S_{xy}}{A}$$

$$S_{xy} = \int_0^A z dA$$

$$y_c = \frac{S_{xz}}{A}$$

$$S_{xz} = \int_0^A y dA$$

Integruji z bodu [0,0]



PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - TĚŽIŠTĚ

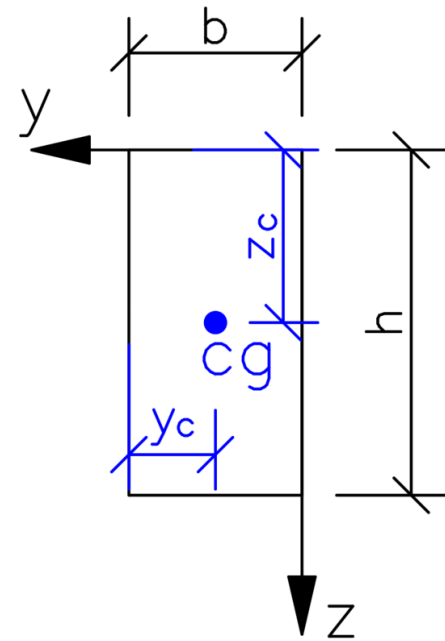
Integrace obrazce - obdélník

$$z_c = \frac{S_{xy}}{A}$$

$$S_{xy} = \int_0^A z dA = \int_0^h \int_0^b z \, dy dz = \int_0^h zb \, dz = b \frac{1}{2} z^2 = \frac{1}{2} b h^2$$

$$y_c = \frac{S_{xz}}{A}$$

$$S_{xz} = \int_0^A y dA = \int_0^b \int_0^h y \, dz dy = \int_0^b yh \, dy = h \frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{2} b^2 h$$



PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - TĚŽIŠTĚ

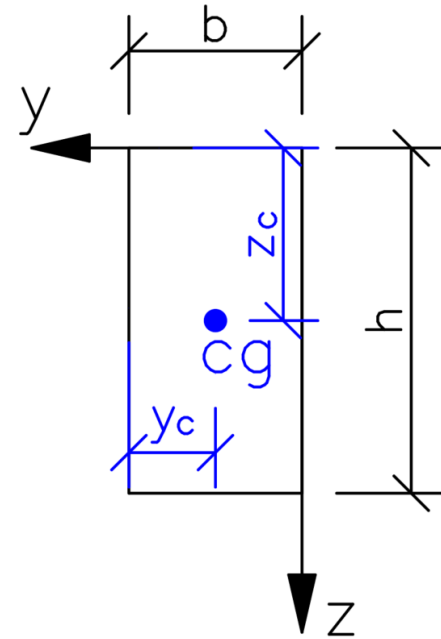
Integrace obrazce - obdélník

$$z_c = \frac{S_{xy}}{A} = \frac{\frac{1}{2}bh^2}{bh} = \frac{1}{2}h$$

$$S_{xy} = \int_0^A z dA = \int_0^h \int_0^b z \, dy dz = \int_0^h zb \, dz = b \frac{1}{2}z^2 = \frac{1}{2}bh^2$$

$$y_c = \frac{S_{xz}}{A} = \frac{\frac{1}{2}b^2h}{bh} = \frac{1}{2}b$$

$$S_{xz} = \int_0^A y dA = \int_0^b \int_0^h y \, dz dy = \int_0^b yh \, dy = h \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}b^2h$$



PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - TĚŽIŠTĚ

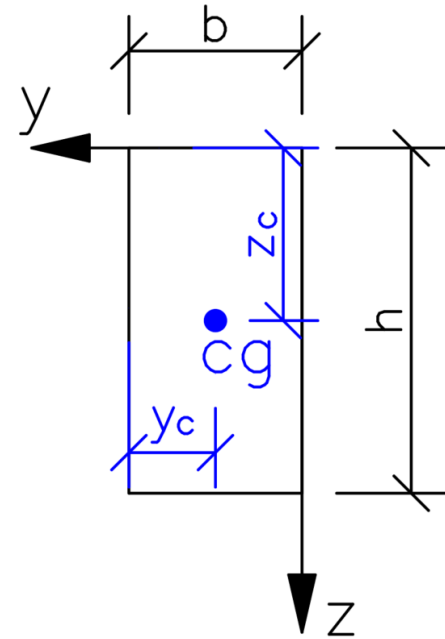
Integrace obrazce - obdélník

$$z_c = \frac{S_{xy}}{A} = \frac{\frac{1}{2}bh^2}{bh} = \frac{1}{2}h$$

$$S_{xy} = \int_0^A z dA = \int_0^h \int_0^b z \, dy dz = \int_0^h zb \, dz = b \frac{1}{2}z^2 = \frac{1}{2}bh^2 = \frac{1}{2}hA$$

$$y_c = \frac{S_{xz}}{A} = \frac{\frac{1}{2}b^2h}{bh} = \frac{1}{2}b$$

$$S_{xz} = \int_0^A y dA = \int_0^b \int_0^h y \, dz dy = \int_0^b yh \, dy = h \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}b^2h = \frac{1}{2}bA$$



PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - TĚŽIŠTĚ

Integrace obrazce - obdélník

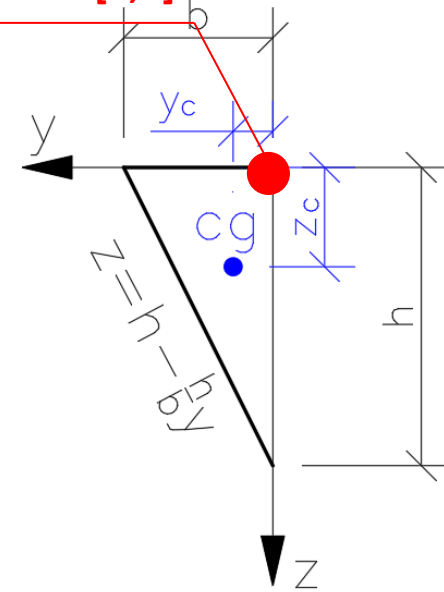
$$z_c = \frac{S_{xy}}{A}$$

$$S_{xy} = \int_0^h \int_0^{b-\frac{bz}{h}} z \, dy \, dz$$

$$y_c = \frac{S_{xz}}{A}$$

$$S_{xz} = \int_0^h \int_0^{b-\frac{bz}{h}} y \, dy \, dz$$

Integruji z bodu [0,0]



PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - TĚŽIŠTĚ

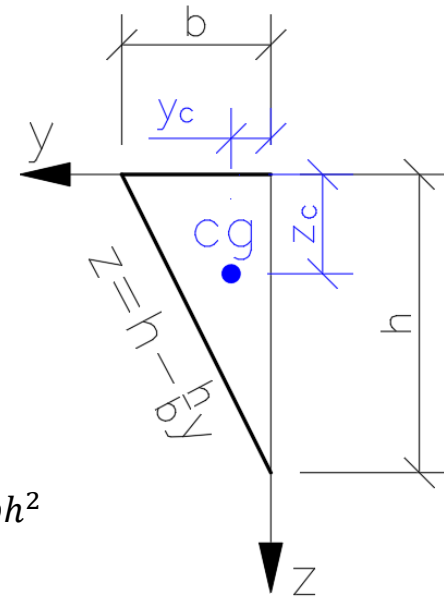
Integrace obrazce - obdélník

$$z_c = \frac{S_{xy}}{A}$$

$$S_{xy} = \int_0^h \int_0^{b-\frac{bz}{h}} z \, dy \, dz = \int_0^h z[y]_0^{b-bz/h} \, dz = \int_0^h zb - \frac{b}{h}z \, dz = \left[\frac{1}{2}z^2b - \frac{1}{3}\frac{bz^3}{h} \right]_0^h = \frac{1}{6}bh^2$$

$$y_c = \frac{S_{xz}}{A}$$

$$S_{xz} = \int_0^h \int_0^{b-\frac{bz}{h}} y \, dy \, dz = \int_0^h \frac{1}{2}[y^2]_0^{b-bz/h} \, dz = \frac{1}{2} \int_0^h \left(b^2 - \frac{2b^2z}{h} + \frac{b^2z^2}{h^2} \right) dz = \frac{1}{6}b^2h$$



PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - TĚŽIŠTĚ

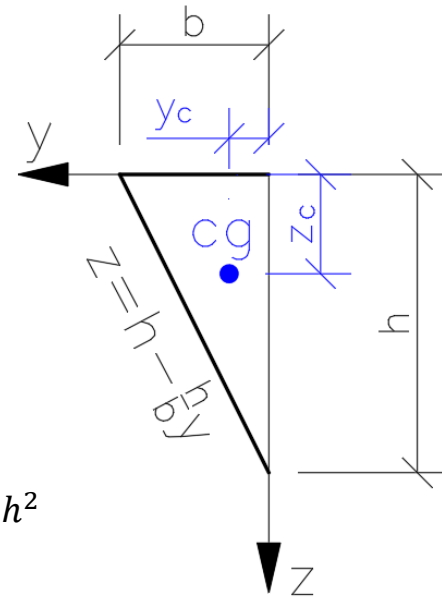
Integrace obrazce - obdélník

$$z_c = \frac{S_{xy}}{A} = \frac{\frac{1}{6}bh^2}{\frac{bh}{2}} = \frac{1}{3}h$$

$$S_{xy} = \int_0^h \int_0^{b-\frac{bz}{h}} z \, dy \, dz = \int_0^h z[y]_0^{b-bz/h} \, dz = \int_0^h zb - \frac{b}{h}z^2 \, dz = \left[\frac{1}{2}z^2b - \frac{1}{3}\frac{bz^3}{h} \right]_0^h = \frac{1}{6}bh^2$$

$$y_c = \frac{S_{xz}}{A} = \frac{\frac{1}{6}b^2h}{\frac{bh}{2}} = \frac{1}{3}b$$

$$S_{xz} = \int_0^h \int_0^{b-\frac{bz}{h}} y \, dy \, dz = \int_0^h \frac{1}{2}[y^2]_0^{b-bz/h} \, dz = \frac{1}{2} \int_0^h \left(b^2 - \frac{2b^2z}{h} + \frac{b^2z^2}{h^2} \right) \, dz = \frac{1}{6}b^2h$$



PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - TĚŽIŠTĚ

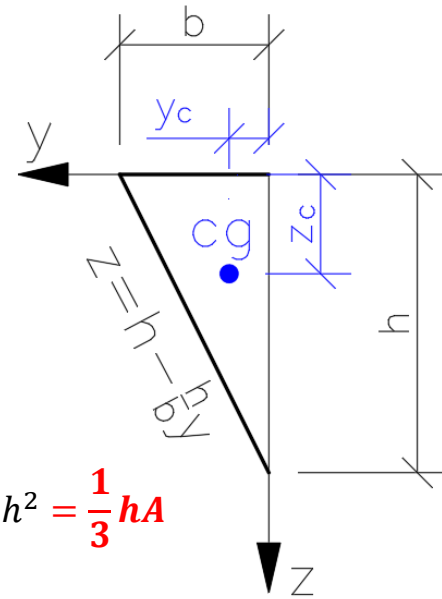
Integrace obrazce - obdélník

$$z_c = \frac{S_{xy}}{A} = \frac{\frac{1}{6}bh^2}{\frac{bh}{2}} = \frac{1}{3}h$$

$$S_{xy} = \int_0^h \int_0^{b(b-z/h)} z \, dy \, dz = \int_0^h z[y]_0^{b-bz/h} \, dz = \int_0^h zb - \frac{b}{h}z^2 \, dz = \left[\frac{1}{2}z^2b - \frac{1}{3}\frac{bz^3}{h} \right]_0^h = \frac{1}{6}bh^2 = \frac{1}{3}hA$$

$$y_c = \frac{S_{xz}}{A} = \frac{\frac{1}{6}b^2h}{\frac{bh}{2}} = \frac{1}{3}b$$

$$S_{xz} = \int_0^h \int_0^{b(b-z/h)} y \, dy \, dz = \int_0^h \frac{1}{2}[y^2]_0^{b-bz/h} \, dz = \frac{1}{2} \int_0^h b^2 - \frac{2b^2z}{h} + \frac{b^2z^2}{h^2} \, dz = \frac{1}{6}b^2h = \frac{1}{3}bA$$



PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - TĚŽIŠTĚ

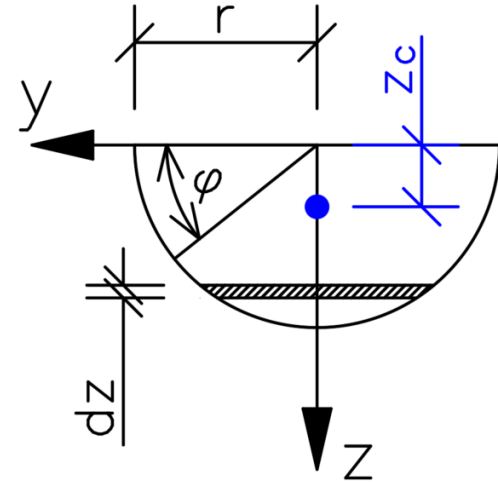
Integrace obrazce - obdélník

$$z_c = \frac{S_{xy}}{A}$$

$$S_{xy} = \int_0^A z \, dA$$

$$y_c = \frac{S_{xz}}{A}$$

$$S_{xz} = \int_0^A y \, dA$$



$$y = r \cdot \cos \varphi$$

$$z = r \cdot \sin \varphi$$

$$dz = r \cdot \cos \varphi \, d\varphi$$

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - TĚŽIŠTĚ

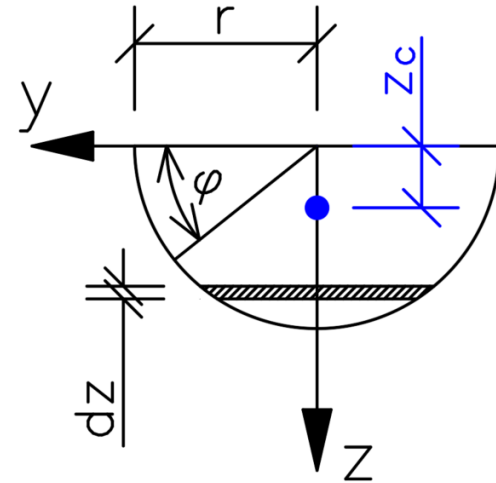
Integrace obrazce - obdélník

$$z_c = \frac{S_{xy}}{A}$$

$$S_{xy} = \int_0^A z \, dA = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \cdot \cos \varphi \cdot r \cdot \sin \varphi \cdot r \cdot \cos \varphi \, d\varphi = \frac{2}{3} r^3 [\cos \varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} r^3 1$$

$$y_c = \frac{S_{xz}}{A}$$

$$S_{xz} = \int_0^A y \, dA = \int_0^{\pi} r \cdot \cos \varphi \cdot r \cdot \sin \varphi \cdot r \cdot \sin \varphi \, d\varphi = \frac{2}{3} r^3 [\sin \varphi]_0^{\pi} = \frac{2}{3} r^3 0$$



$$y = r \cdot \cos \varphi$$

$$z = r \cdot \sin \varphi$$

$$dz = r \cdot \cos \varphi \, d\varphi$$

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - TĚŽIŠTĚ

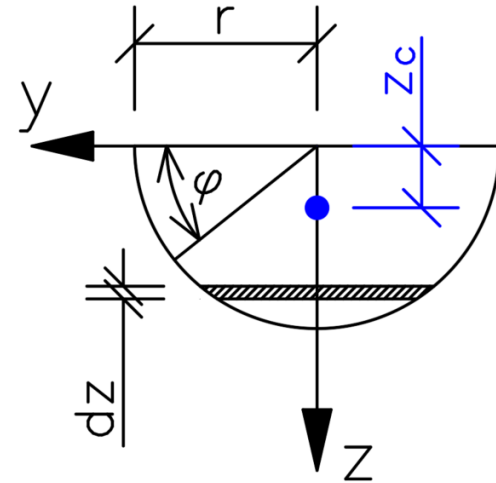
Integrace obrazce - obdélník

$$z_c = \frac{S_{xy}}{A} = \frac{\frac{2}{3}r^3}{\frac{\pi r^2}{2}} = \frac{4}{3}\pi r$$

$$S_{xy} = \int_0^A z dA = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \cdot \cos \varphi \cdot r \cdot \sin \varphi \cdot r \cdot \cos \varphi d\varphi = \frac{2}{3}r^3 [\cos \varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}r^3 \cdot 1$$

$$y_c = \frac{S_{xz}}{A} = \frac{0}{\frac{\pi r^2}{2}} = 0$$

$$S_{xz} = \int_0^A y dA = \int_0^{\pi} r \cdot \cos \varphi \cdot r \cdot \sin \varphi \cdot r \cdot \sin \varphi d\varphi = \frac{2}{3}r^3 [\sin \varphi]_0^{\pi} = \frac{2}{3}r^3 \cdot 0$$



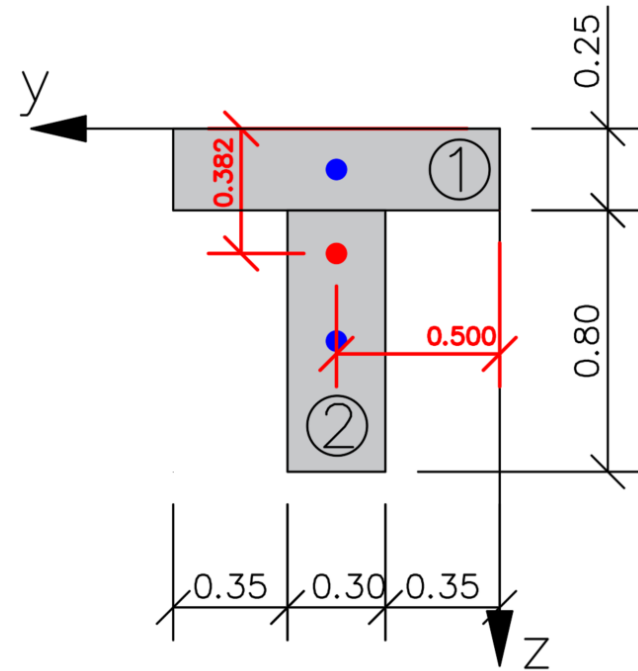
$$y = r \cdot \cos \varphi$$

$$z = r \cdot \sin \varphi$$

$$dz = r \cdot \cos \varphi d\varphi$$

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - TĚŽIŠTĚ

Složené obrazce



PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - TĚŽIŠTĚ

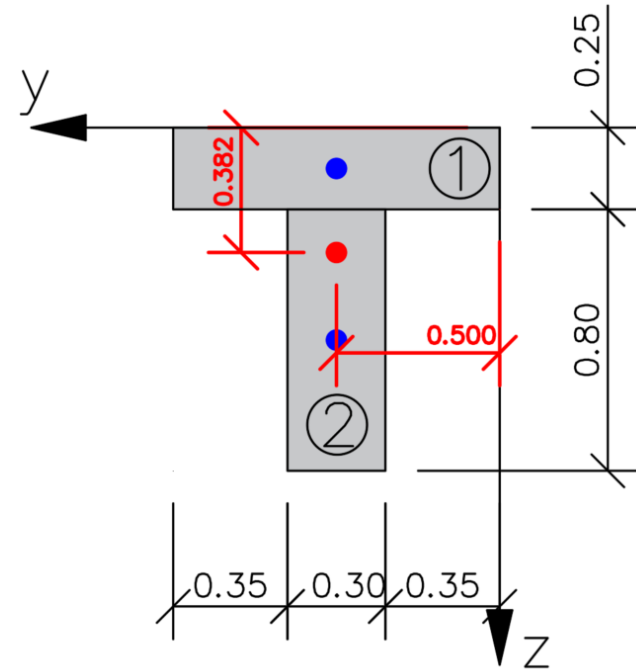
Složené obrazce

OBRAZEC 1

$$A_1 = b_1 h_1 = 1.0,25 = 0,25 \text{ m}^2$$

$$S_{xz,1} = A_1 \cdot y_{c,1} = 0,25 \cdot 0,5 = 0,125 \text{ m}^3$$

$$S_{xy,1} = A_1 \cdot z_{c,1} = 0,25 \cdot 0,125 = 0,031 \text{ m}^3$$



PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - TĚŽIŠTĚ

Složené obrazce

OBRAZEC 1

$$A_1 = b_1 h_1 = 1.0,25 = 0,25 \text{ m}^2$$

$$S_{xz,1} = A_1 \cdot y_{c,1} = 0,25 \cdot 0,5 = 0,125 \text{ m}^3$$

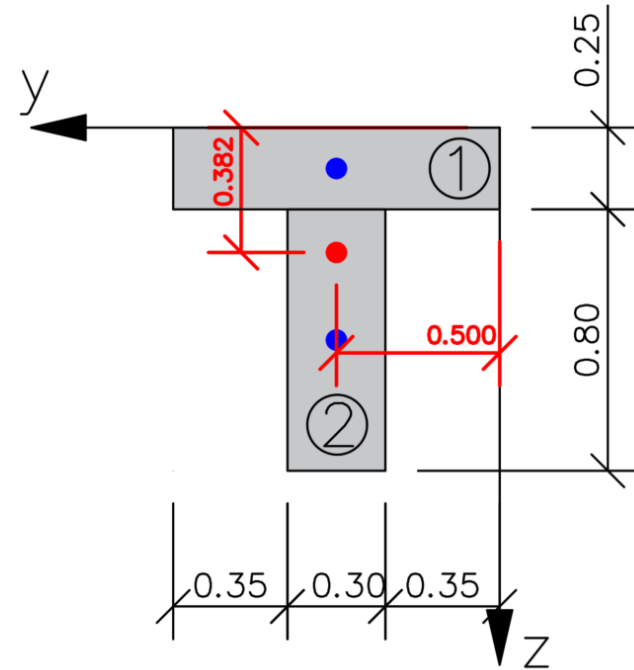
$$S_{xy,1} = A_1 \cdot z_{c,1} = 0,25 \cdot 0,125 = 0,031 \text{ m}^3$$

OBRAZEC 2

$$A_2 = b_2 h_2 = 0,3 \cdot 0,8 = 0,24 \text{ m}^2$$

$$S_{xz,2} = A_2 \cdot y_{c,2} = 0,24 \cdot 0,5 = 0,12 \text{ m}^3$$

$$S_{xy,2} = A_2 \cdot z_{c,2} = 0,24 \cdot 0,65 = 0,156 \text{ m}^3$$



PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - TĚŽIŠTĚ

Složené obrazce

OBRAZEC 1

$$A_1 = b_1 h_1 = 1.0,25 = 0,25 \text{ m}^2$$

$$S_{xz,1} = A_1 \cdot y_{c,1} = 0,25 \cdot 0,5 = 0,125 \text{ m}^3$$

$$S_{xy,1} = A_1 \cdot z_{c,1} = 0,25 \cdot 0,125 = 0,031 \text{ m}^3$$

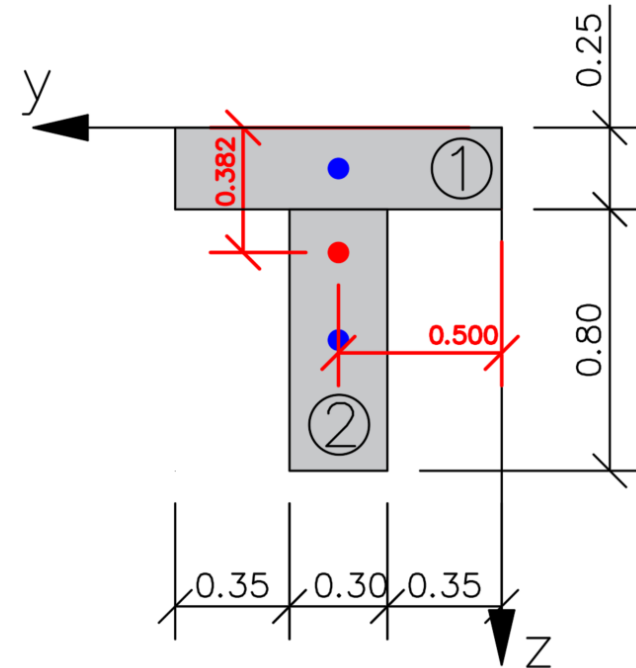
OBRAZEC 2

$$A_2 = b_2 h_2 = 0,3 \cdot 0,8 = 0,24 \text{ m}^2$$

$$S_{xz,2} = A_2 \cdot y_{c,2} = 0,24 \cdot 0,5 = 0,12 \text{ m}^3$$

$$S_{xy,2} = A_2 \cdot z_{c,2} = 0,24 \cdot 0,65 = 0,156 \text{ m}^3$$

Souřadnice y_c, z_c vztahují
k počátku souřadnicové
soustavy.



PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - TĚŽIŠTĚ

Složené obrazce

OBRAZEC 1

$$A_1 = b_1 h_1 = 1.0,25 = 0,25 \text{ m}^2$$

$$S_{xz,1} = A_1 \cdot y_{c,1} = 0,25 \cdot 0,5 = 0,125 \text{ m}^3$$

$$S_{xy,1} = A_1 \cdot z_{c,1} = 0,25 \cdot 0,125 = 0,031 \text{ m}^3$$

OBRAZEC 2

$$A_2 = b_2 h_2 = 0,3 \cdot 0,8 = 0,24 \text{ m}^2$$

$$S_{xz,2} = A_2 \cdot y_{c,2} = 0,24 \cdot 0,5 = 0,12 \text{ m}^3$$

$$S_{xy,2} = A_2 \cdot z_{c,2} = 0,24 \cdot 0,65 = 0,156 \text{ m}^3$$

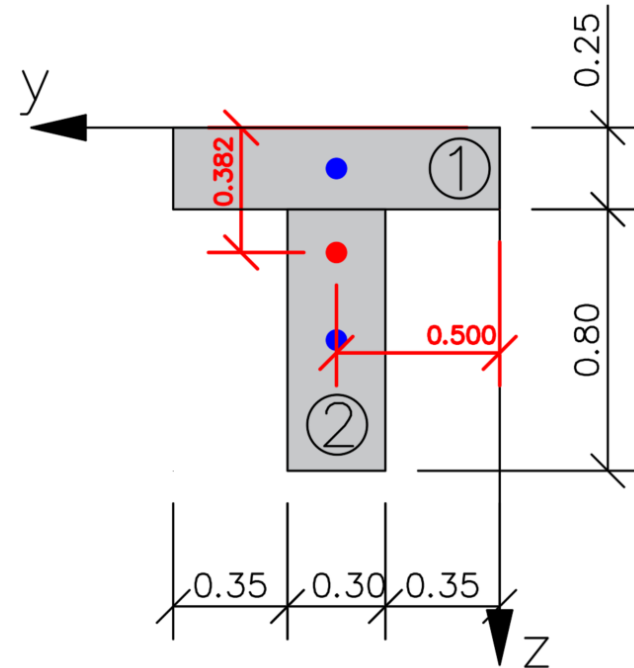
SOUŘADNICE TĚŽIŠTĚ

$$Ay_c = S_{xz,1} + S_{xz,2}$$

$$Az_c = S_{xy,1} + S_{xy,2}$$

$$y_c = \frac{0,125 + 0,12}{0,49} = 0,5 \text{ m}$$

$$z_c = \frac{0,031 + 0,156}{0,49} = 0,382 \text{ m}$$



PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - TĚŽIŠTĚ

Složené obrazce

OBRAZEC 1

$$A_1 = b_1 h_1 = 1,0 \cdot 0,25 = 0,25 \text{ m}^2$$

$$S_{xz,1} = A_1 \cdot y_{c,1} = 0,25 \cdot 0,5 = 0,125 \text{ m}^3$$

$$S_{xy,1} = A_1 \cdot z_{c,1} = 0,25 \cdot 0,125 = 0,031 \text{ m}^3$$

OBRAZEC 2

$$A_2 = b_2 h_2 = 0,3 \cdot 0,8 = 0,24 \text{ m}^2$$

$$S_{xz,2} = A_2 \cdot y_{c,2} = 0,24 \cdot 0,5 = 0,12 \text{ m}^3$$

$$S_{xy,2} = A_2 \cdot z_{c,2} = 0,24 \cdot 0,65 = 0,156 \text{ m}^3$$

SOUŘADNICE TĚŽIŠTĚ

$$Ay_c = S_{xz,1} + S_{xz,2}$$

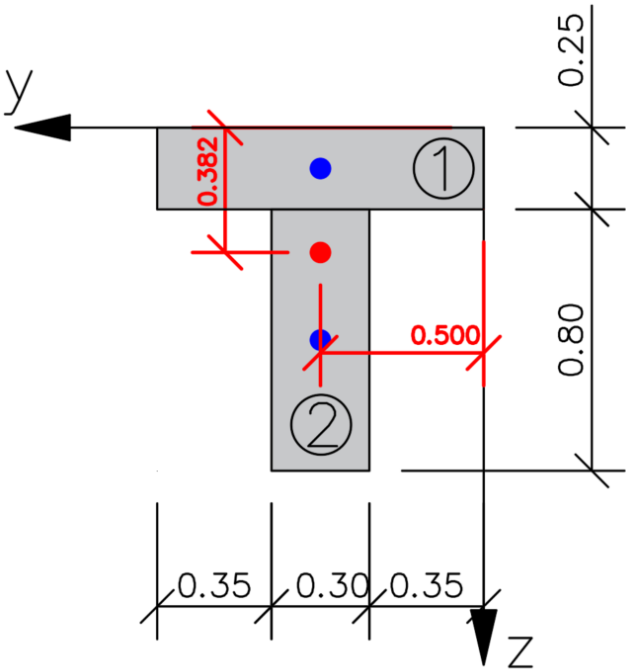
$$y_c = \frac{0,125 + 0,12}{0,49} = 0,5 \text{ m}$$

$$Az_c = S_{xy,1} + S_{xy,2}$$

$$z_c = \frac{0,031 + 0,156}{0,49} = 0,382 \text{ m}$$

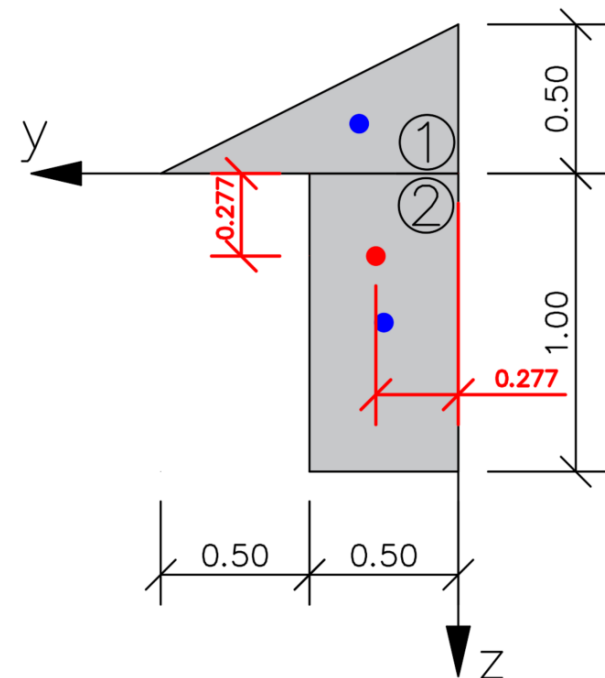
	1	2
B [m]	1	0.3
H [m]	0.25	0.8
A [m²]	0.25	0.24
y _{c,i} [m]	0.5	0.5
z _{c,i} [m]	0.125	0.65
Ac _y [m³]	0.125	0.12
Ac _z [m³]	0.031	0.156

ΣA [m²]	0.49
y _c [m]	0.5
z _c [m]	0.382



PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - TĚŽIŠTĚ

Složené obrazce



PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - TĚŽIŠTĚ

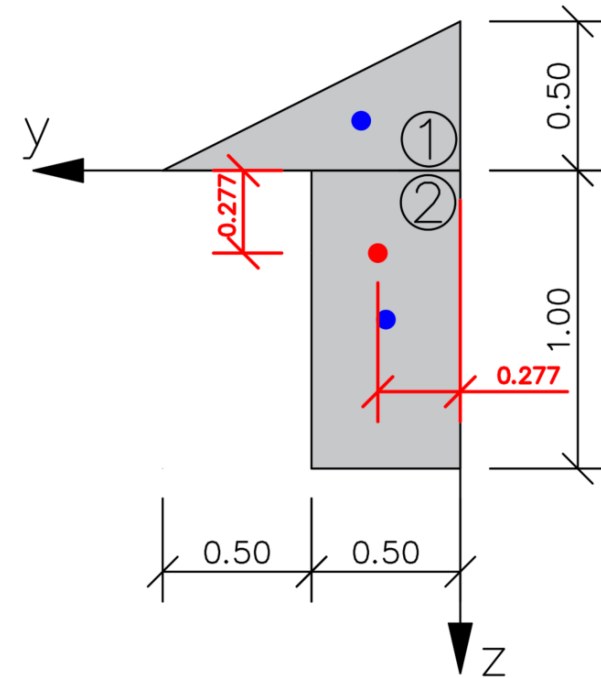
Složené obrazce

OBRAZEC 1

$$A_1 = 0,5b_1h_1 = 0,5 \cdot 1 \cdot 0,5 = 0,25 \text{ m}^2$$

$$S_{xz,1} = A_1 \cdot y_{c,1} = 0,25 \cdot 0,333 = 0,083 \text{ m}^3$$

$$S_{xy,1} = A_1 \cdot z_{c,1} = 0,25 \cdot (-0,167) = -0,042 \text{ m}^3$$



PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - TĚŽIŠTĚ

Složené obrazce

OBRAZEC 1

$$A_1 = 0,5b_1h_1 = 0,5 \cdot 1 \cdot 0,5 = 0,25 \text{ m}^2$$

$$S_{xz,1} = A_1 \cdot y_{c,1} = 0,25 \cdot 0,333 = 0,083 \text{ m}^3$$

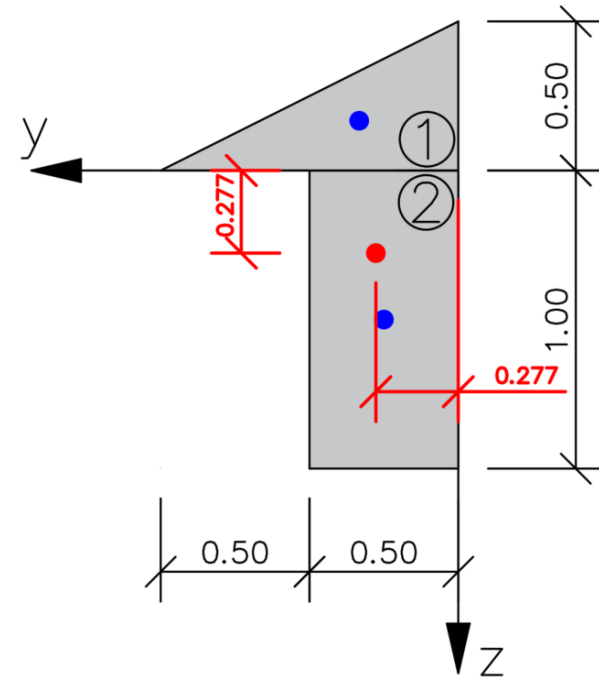
$$S_{xy,1} = A_1 \cdot z_{c,1} = 0,25 \cdot (-0,167) = -0,042 \text{ m}^3$$

OBRAZEC 2

$$A_2 = b_2h_2 = 0,5 \cdot 1 = 0,5 \text{ m}^2$$

$$S_{xz,2} = A_2 \cdot y_{c,2} = 0,5 \cdot 0,25 = 0,125 \text{ m}^3$$

$$S_{xy,2} = A_2 \cdot z_{c,2} = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25 \text{ m}^3$$



PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - TĚŽIŠTĚ

Složené obrazce

OBRAZEC 1

$$A_1 = 0,5b_1h_1 = 0,5 \cdot 1 \cdot 0,5 = 0,25 \text{ m}^2$$

$$S_{xz,1} = A_1 \cdot y_{c,1} = 0,25 \cdot 0,333 = 0,083 \text{ m}^3$$

$$S_{xy,1} = A_1 \cdot z_{c,1} = 0,25 \cdot (-0,167) = -0,042 \text{ m}^3$$

OBRAZEC 2

$$A_2 = b_2h_2 = 0,5 \cdot 1 = 0,5 \text{ m}^2$$

$$S_{xz,2} = A_2 \cdot y_{c,2} = 0,5 \cdot 0,25 = 0,125 \text{ m}^3$$

$$S_{xy,2} = A_2 \cdot z_{c,2} = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25 \text{ m}^3$$

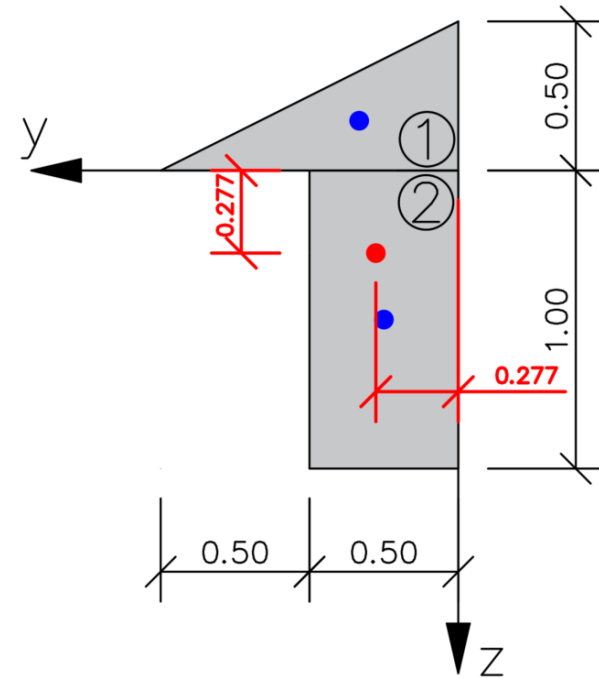
SOUŘADNICE TĚŽIŠTĚ

$$Ay_c = S_{xz,1} + S_{xz,2}$$

$$Az_c = S_{xy,1} + S_{xy,2}$$

$$y_c = \frac{0,083 + 0,125}{0,75} = 0,277 \text{ m}$$

$$z_c = \frac{-0,042 + 0,25}{0,75} = 0,277 \text{ m}$$



PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - TĚŽIŠTĚ

Složené obrazce

OBRAZEC 1

$$A_1 = 0,5b_1h_1 = 0,5 \cdot 1 \cdot 0,5 = 0,25 \text{ m}^2$$

$$S_{xz,1} = A_1 \cdot y_{c,1} = 0,25 \cdot 0,333 = 0,083 \text{ m}^3$$

$$S_{xy,1} = A_1 \cdot z_{c,1} = 0,25 \cdot (-0,167) = -0,042 \text{ m}^3$$

OBRAZEC 2

$$A_2 = b_2h_2 = 0,5 \cdot 1 = 0,5 \text{ m}^2$$

$$S_{xz,2} = A_2 \cdot y_{c,2} = 0,5 \cdot 0,25 = 0,125 \text{ m}^3$$

$$S_{xy,2} = A_2 \cdot z_{c,2} = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25 \text{ m}^3$$

SOUŘADNICE TĚŽIŠTĚ

$$Ay_c = S_{xz,1} + S_{xz,2}$$

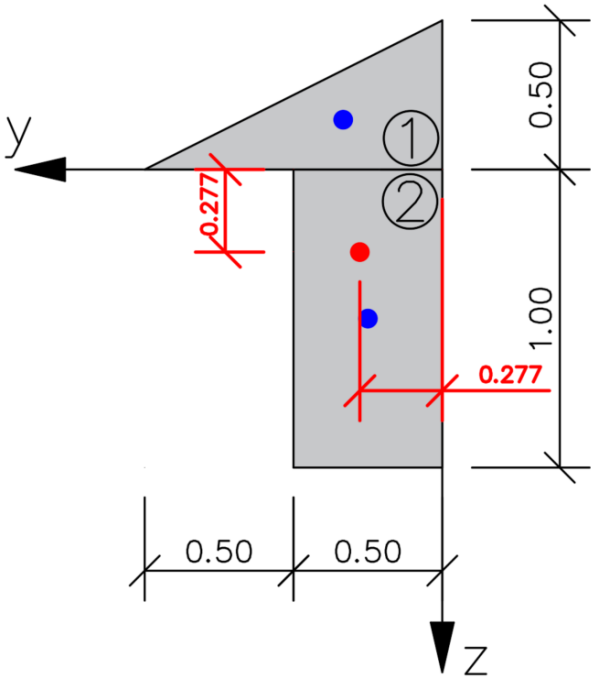
$$Az_c = S_{xy,1} + S_{xy,2}$$

$$y_c = \frac{0,083 + 0,125}{0,75} = 0,277 \text{ m}$$

$$z_c = \frac{-0,042 + 0,25}{0,75} = 0,277 \text{ m}$$

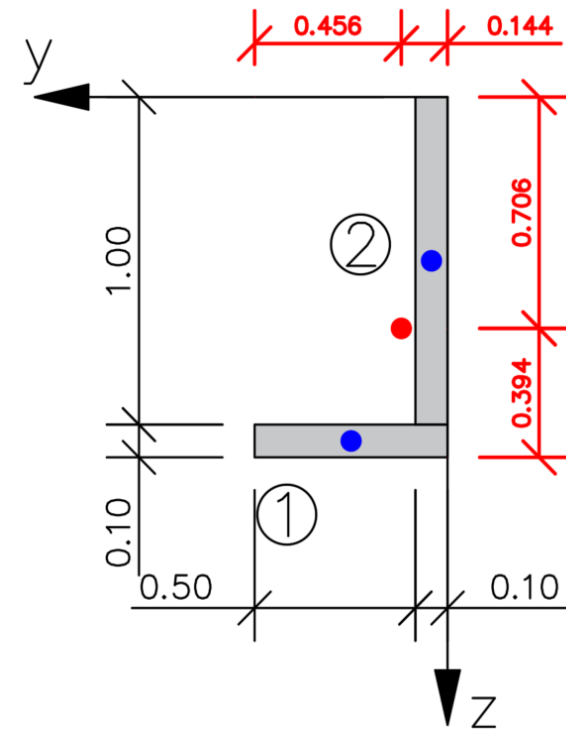
	1	2
B [m]	1	0.5
H [m]	0.5	1
A [m²]	0.25	0.5
y _{c,i} [m]	0.333	0.25
z _{c,i} [m]	-0.167	0.5
Ac _y [m³]	0.083	0.125
Ac _z [m³]	-0.042	0.25

ΣA [m²]	0.75
y _c [m]	0.278
z _c [m]	0.278



PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - TĚŽIŠTĚ

Složené obrazce



PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - TĚŽIŠTĚ

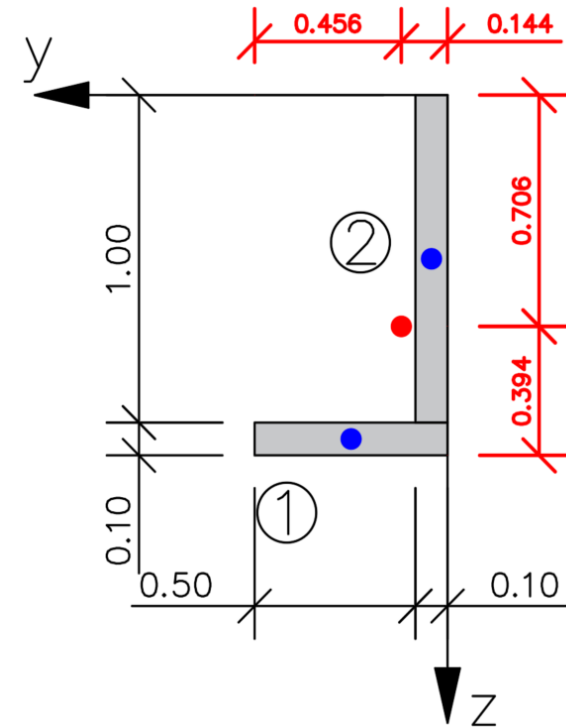
Složené obrazce

OBRAZEC 1

$$A_1 = b_1 h_1 = 0,6 \cdot 0,1 = 0,06 \text{ m}^2$$

$$S_{xz,1} = A_1 \cdot y_{c,1} = 0,06 \cdot 0,3 = 0,018 \text{ m}^3$$

$$S_{xy,1} = A_1 \cdot z_{c,1} = 0,06 \cdot 1,05 = 0,063 \text{ m}^3$$



PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - TĚŽIŠTĚ

Složené obrazce

OBRAZEC 1

$$A_1 = b_1 h_1 = 0,6 \cdot 0,1 = 0,06 \text{ m}^2$$

$$S_{xz,1} = A_1 \cdot y_{c,1} = 0,06 \cdot 0,3 = 0,018 \text{ m}^3$$

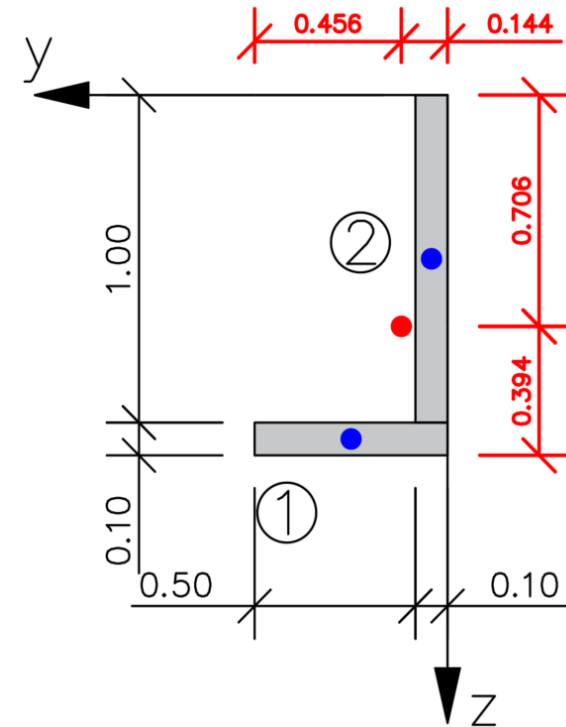
$$S_{xy,1} = A_1 \cdot z_{c,1} = 0,06 \cdot 1,05 = 0,063 \text{ m}^3$$

OBRAZEC 2

$$A_2 = b_2 h_2 = 0,1 \cdot 1 = 0,1 \text{ m}^2$$

$$S_{xz,2} = A_2 \cdot y_{c,2} = 0,1 \cdot 0,05 = 0,005 \text{ m}^3$$

$$S_{xy,2} = A_2 \cdot z_{c,2} = 0,1 \cdot 0,5 = 0,05 \text{ m}^3$$



PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - TĚŽIŠTĚ

Složené obrazce

OBRAZEC 1

$$A_1 = b_1 h_1 = 0,6 \cdot 0,1 = 0,06 \text{ m}^2$$

$$S_{xz,1} = A_1 \cdot y_{c,1} = 0,06 \cdot 0,3 = 0,018 \text{ m}^3$$

$$S_{xy,1} = A_1 \cdot z_{c,1} = 0,06 \cdot 1,05 = 0,063 \text{ m}^3$$

OBRAZEC 2

$$A_2 = b_2 h_2 = 0,1 \cdot 1 = 0,1 \text{ m}^2$$

$$S_{xz,2} = A_2 \cdot y_{c,2} = 0,1 \cdot 0,05 = 0,005 \text{ m}^3$$

$$S_{xy,2} = A_2 \cdot z_{c,2} = 0,1 \cdot 0,5 = 0,05 \text{ m}^3$$

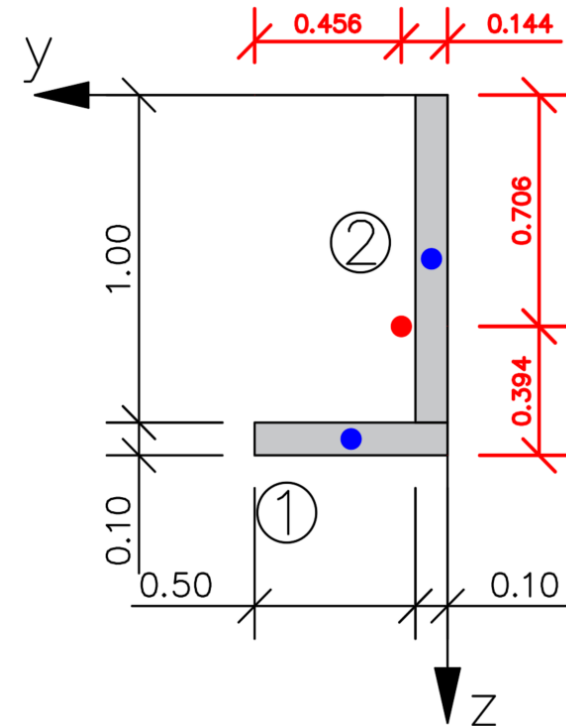
SOUŘADNICE TĚŽIŠTĚ

$$Ay_c = S_{xz,1} + S_{xz,2}$$

$$Az_c = S_{xy,1} + S_{xy,2}$$

$$y_c = \frac{0,018 + 0,005}{0,16} = 0,144 \text{ m}$$

$$z_c = \frac{0,063 + 0,05}{0,16} = 0,706 \text{ m}$$



PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - TĚŽIŠTĚ

Složené obrazce

OBRAZEC 1

$$A_1 = b_1 h_1 = 0,6 \cdot 0,1 = 0,06 \text{ m}^2$$

$$S_{xz,1} = A_1 \cdot y_{c,1} = 0,06 \cdot 0,3 = 0,018 \text{ m}^3$$

$$S_{xy,1} = A_1 \cdot z_{c,1} = 0,06 \cdot 1,05 = 0,063 \text{ m}^3$$

OBRAZEC 2

$$A_2 = b_2 h_2 = 0,1 \cdot 1 = 0,1 \text{ m}^2$$

$$S_{xz,2} = A_2 \cdot y_{c,2} = 0,1 \cdot 0,05 = 0,005 \text{ m}^3$$

$$S_{xy,2} = A_2 \cdot z_{c,2} = 0,1 \cdot 0,5 = 0,05 \text{ m}^3$$

SOUŘADNICE TĚŽIŠTĚ

$$Ay_c = S_{xz,1} + S_{xz,2}$$

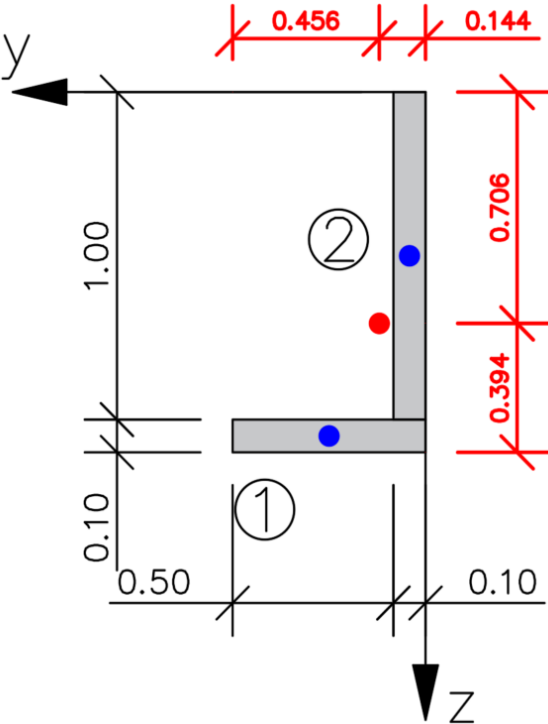
$$Az_c = S_{xy,1} + S_{xy,2}$$

$$y_c = \frac{0,018 + 0,005}{0,16} = 0,144 \text{ m}$$

$$z_c = \frac{0,063 + 0,05}{0,16} = 0,706 \text{ m}$$

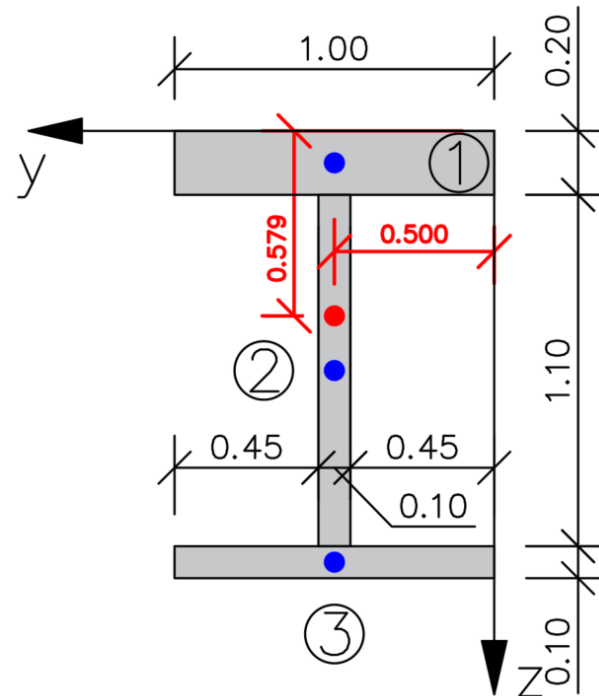
	1	2
B [m]	0.6	0.1
H [m]	0.1	1
A [m²]	0.06	0.1
y _{c,i} [m]	0.3	0.05
z _{c,i} [m]	1.05	0.5
Ac _y [m³]	0.018	0.005
Ac _z [m³]	0.063	0.05

ΣA [m²]	0.16
y _c [m]	0.14375
z _c [m]	0.70625



PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - TĚŽIŠTĚ

Složené obrazce



PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - TĚŽIŠTĚ

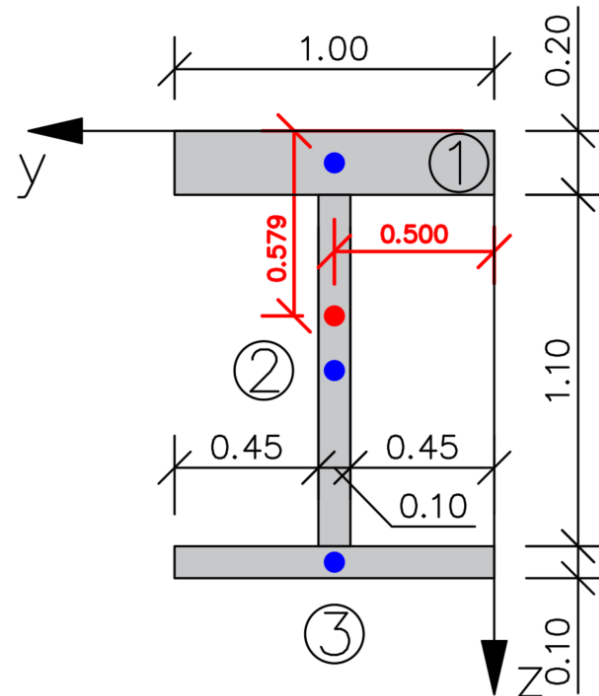
Složené obrazce

OBRAZEC 1

$$A_1 = b_1 h_1 = 1,0 \cdot 0,2 = 0,2 \text{ m}^2$$

$$S_{xz,1} = A_1 \cdot y_{c,1} = 0,2 \cdot 0,5 = 0,1 \text{ m}^3$$

$$S_{xy,1} = A_1 \cdot z_{c,1} = 0,2 \cdot 0,1 = 0,02 \text{ m}^3$$



PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - TĚŽIŠTĚ

Složené obrazce

OBRAZEC 1

$$A_1 = b_1 h_1 = 1,0 \cdot 0,2 = 0,2 \text{ m}^2$$

$$S_{xz,1} = A_1 \cdot y_{c,1} = 0,2 \cdot 0,5 = 0,1 \text{ m}^3$$

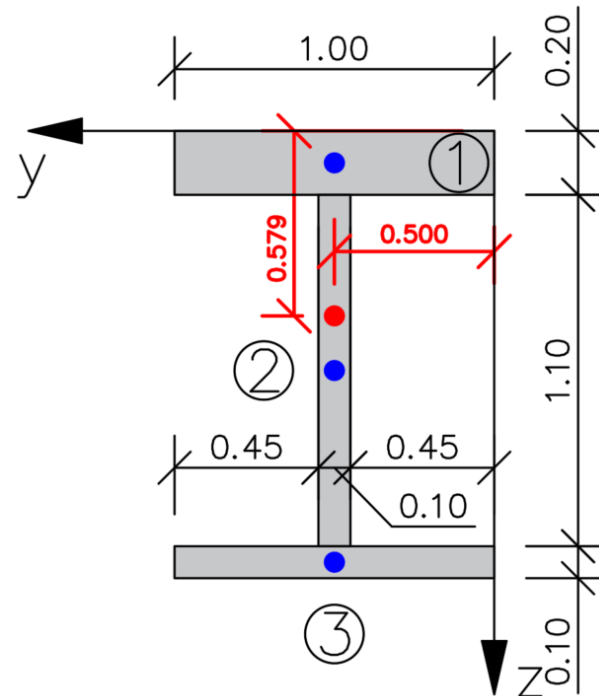
$$S_{xy,1} = A_1 \cdot z_{c,1} = 0,2 \cdot 0,1 = 0,02 \text{ m}^3$$

OBRAZEC 2

$$A_2 = b_2 h_2 = 0,1 \cdot 1,1 = 0,11 \text{ m}^2$$

$$S_{xz,2} = A_2 \cdot y_{c,2} = 0,11 \cdot 0,5 = 0,055 \text{ m}^3$$

$$S_{xy,2} = A_2 \cdot z_{c,2} = 0,11 \cdot 0,75 = 0,083 \text{ m}^3$$



PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - TĚŽIŠTĚ

Složené obrazce

OBRAZEC 1

$$A_1 = b_1 h_1 = 1,0 \cdot 0,2 = 0,2 \text{ m}^2$$

$$S_{xz,1} = A_1 \cdot y_{c,1} = 0,2 \cdot 0,5 = 0,1 \text{ m}^3$$

$$S_{xy,1} = A_1 \cdot z_{c,1} = 0,2 \cdot 0,1 = 0,02 \text{ m}^3$$

OBRAZEC 2

$$A_2 = b_2 h_2 = 0,1 \cdot 1,1 = 0,11 \text{ m}^2$$

$$S_{xz,2} = A_2 \cdot y_{c,2} = 0,11 \cdot 0,5 = 0,055 \text{ m}^3$$

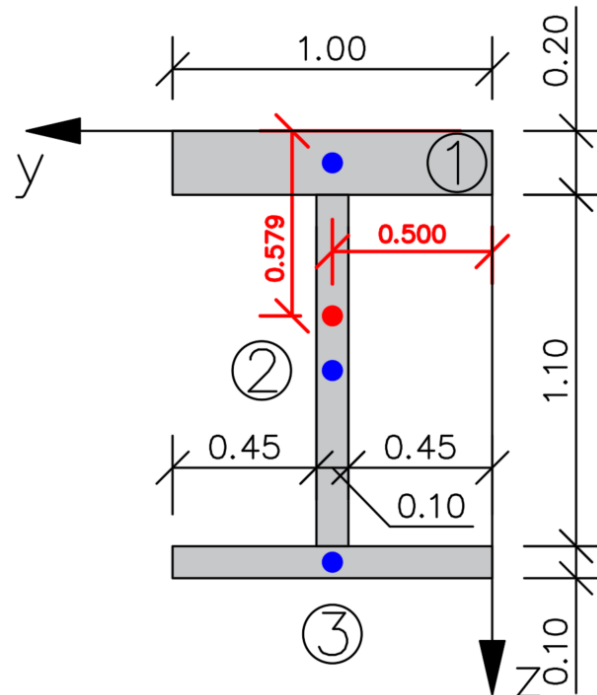
$$S_{xy,2} = A_2 \cdot z_{c,2} = 0,11 \cdot 0,75 = 0,083 \text{ m}^3$$

OBRAZEC 3

$$A_3 = b_3 h_3 = 1,0 \cdot 0,1 = 0,1 \text{ m}^2$$

$$S_{xz,3} = A_3 \cdot y_{c,3} = 0,1 \cdot 0,5 = 0,05 \text{ m}^3$$

$$S_{xy,3} = A_3 \cdot z_{c,3} = 0,1 \cdot 1,35 = 0,135 \text{ m}^3$$



PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - TĚŽIŠTĚ

Složené obrazce

OBRAZEC 1

$$A_1 = b_1 h_1 = 1,0 \cdot 0,2 = 0,2 \text{ m}^2$$

$$S_{xz,1} = A_1 \cdot y_{c,1} = 0,2 \cdot 0,5 = 0,1 \text{ m}^3$$

$$S_{xy,1} = A_1 \cdot z_{c,1} = 0,2 \cdot 0,1 = 0,02 \text{ m}^3$$

OBRAZEC 2

$$A_2 = b_2 h_2 = 0,1 \cdot 1,1 = 0,11 \text{ m}^2$$

$$S_{xz,2} = A_2 \cdot y_{c,2} = 0,11 \cdot 0,5 = 0,055 \text{ m}^3$$

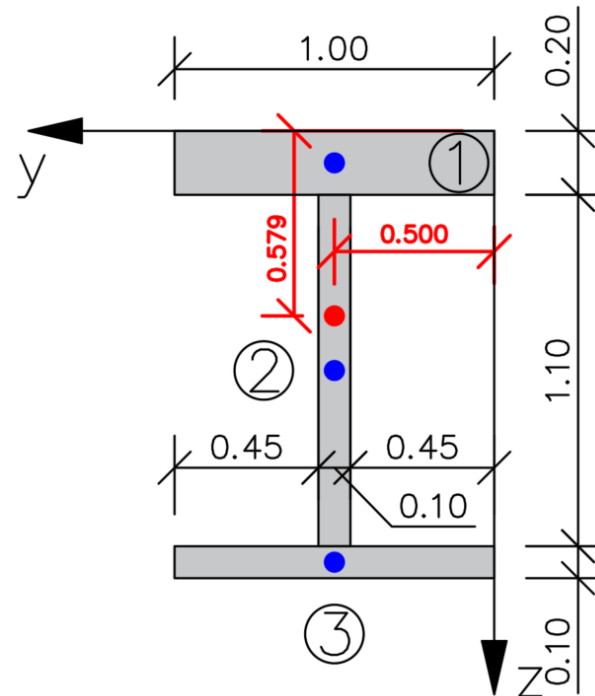
$$S_{xy,2} = A_2 \cdot z_{c,2} = 0,11 \cdot 0,75 = 0,083 \text{ m}^3$$

OBRAZEC 3

$$A_3 = b_3 h_3 = 1,0 \cdot 0,1 = 0,1 \text{ m}^2$$

$$S_{xz,3} = A_3 \cdot y_{c,3} = 0,1 \cdot 0,5 = 0,05 \text{ m}^3$$

$$S_{xy,3} = A_3 \cdot z_{c,3} = 0,1 \cdot 1,35 = 0,135 \text{ m}^3$$



SOUŘADNICE TĚŽIŠTĚ

$$Ay_c = S_{xz,1} + S_{xz,2} + S_{xz,3}$$

$$Az_c = S_{xy,1} + S_{xy,2} + S_{xy,3}$$

$$y_c = \frac{0,1 + 0,055 + 0,05}{0,41} = 0,5 \text{ m} \quad z_c = \frac{0,02 + 0,083 + 0,135}{0,41} = 0,579 \text{ m}$$

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - TĚŽIŠTĚ

Složené obrazce

OBRAZEC 1

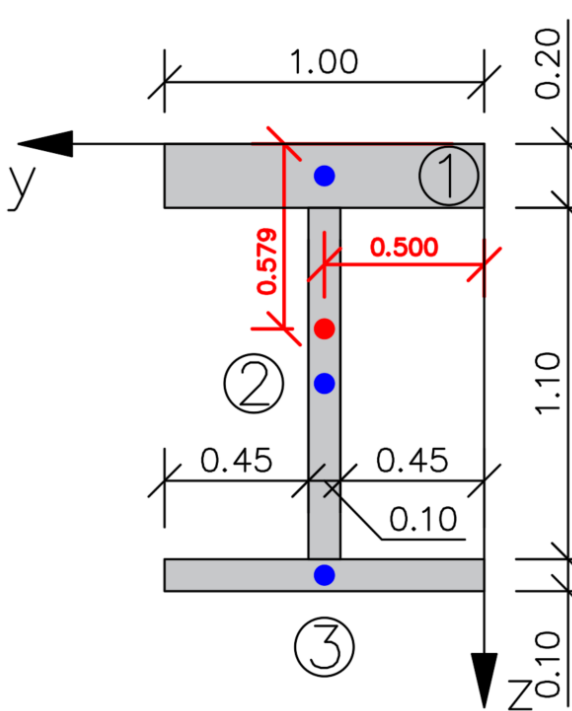
$A_1 = b_1 h_1 = 1.0 \cdot 0.2 = 0.2 \text{ m}^2$
 $S_{xz,1} = A_1 \cdot y_{c,1} = 0.2 \cdot 0.5 = 0.1 \text{ m}^3$
 $S_{xy,1} = A_1 \cdot z_{c,1} = 0.2 \cdot 0.1 = 0.02 \text{ m}^3$

OBRAZEC 2

$A_2 = b_2 h_2 = 0.1 \cdot 1.1 = 0.11 \text{ m}^2$
 $S_{xz,2} = A_2 \cdot y_{c,2} = 0.11 \cdot 0.5 = 0.055 \text{ m}^3$
 $S_{xy,2} = A_2 \cdot z_{c,2} = 0.11 \cdot 0.75 = 0.083 \text{ m}^3$

OBRAZEC 3

$A_3 = b_3 h_3 = 1.0 \cdot 0.1 = 0.1 \text{ m}^2$
 $S_{xz,3} = A_3 \cdot y_{c,3} = 0.1 \cdot 0.5 = 0.05 \text{ m}^3$
 $S_{xy,3} = A_3 \cdot z_{c,3} = 0.1 \cdot 1.35 = 0.135 \text{ m}^3$



	1	2	3
B [m]	1	0.1	1
H [m]	0.2	1.1	0.1
A [m ²]	0.2	0.11	0.1
y _{c,i} [m]	0.5	0.5	0.5
z _{c,i} [m]	0.1	0.75	1.35
Ac _y [m ³]	0.1	0.055	0.05
Ac _z [m ³]	0.02	0.083	0.135

ΣA [m ²]	0.41
y _c [m]	0.5
z _c [m]	0.579

SOUŘADNICE TĚŽIŠTĚ

$Ay_c = S_{xz,1} + S_{xz,2} + S_{xz,3}$ $Az_c = S_{xy,1} + S_{xy,2} + S_{xy,3}$

$y_c = \frac{0.1 + 0.055 + 0.05}{0.41} = 0.5 \text{ m}$ $z_c = \frac{0.02 + 0.083 + 0.135}{0.41} = 0.579 \text{ m}$

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - TĚŽIŠTĚ

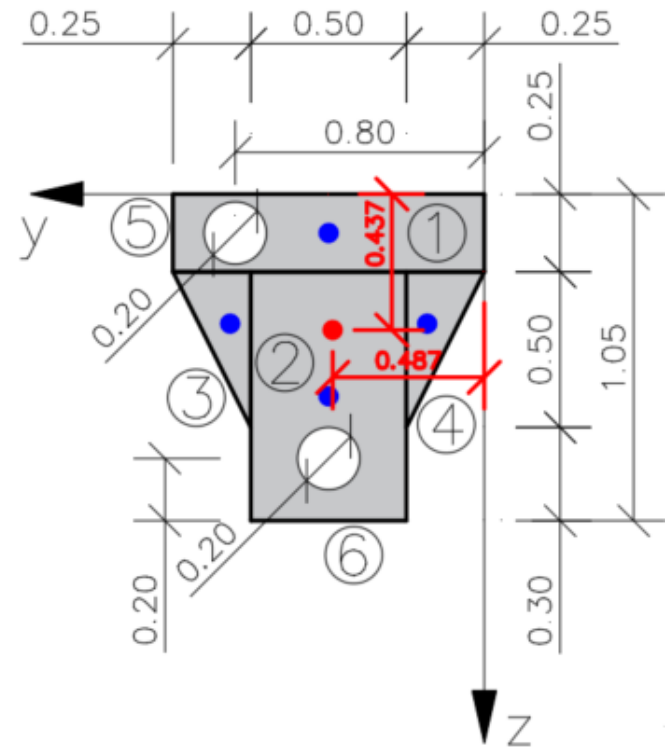
Složené obrazce

OBRAZEC 1

$$A_1 = b_1 h_1 = 1,0 \cdot 0,25 = 0,25 \text{ m}^2$$

$$S_{xz,1} = A_1 \cdot y_{c,1} = 0,25 \cdot 0,5 = 0,125 \text{ m}^3$$

$$S_{xy,1} = A_1 \cdot z_{c,1} = 0,25 \cdot 0,125 = 0,03125 \text{ m}^3$$



PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - TĚŽIŠTĚ

Složené obrazce

OBRAZEC 1

$$A_1 = b_1 h_1 = 1,0 \cdot 0,25 = 0,25 \text{ m}^2$$

$$S_{xz,1} = A_1 \cdot y_{c,1} = 0,25 \cdot 0,5 = 0,125 \text{ m}^3$$

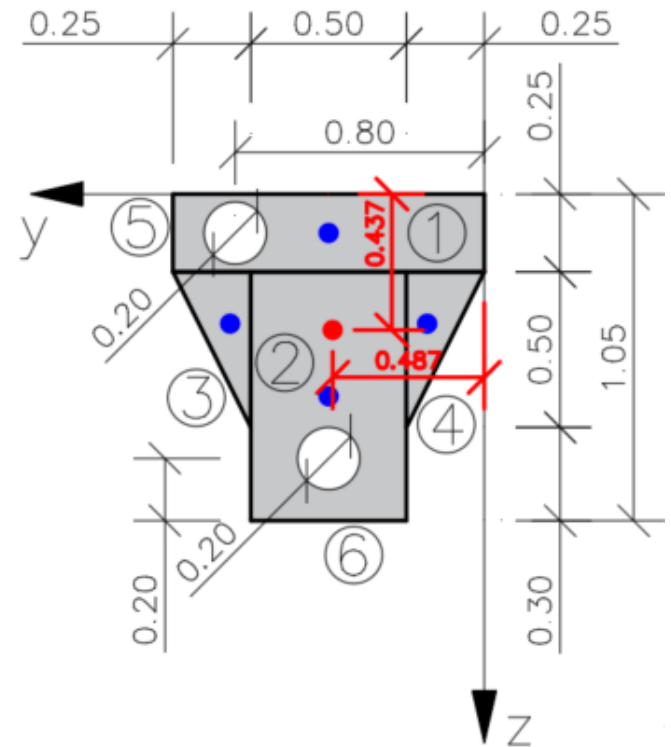
$$S_{xy,1} = A_1 \cdot z_{c,1} = 0,25 \cdot 0,125 = 0,03125 \text{ m}^3$$

OBRAZEC 2

$$A_2 = b_2 h_2 = 0,5 \cdot 0,8 = 0,4 \text{ m}^2$$

$$S_{xz,2} = A_2 \cdot y_{c,2} = 0,4 \cdot 0,5 = 0,2 \text{ m}^3$$

$$S_{xy,2} = A_2 \cdot z_{c,2} = 0,4 \cdot 0,65 = 0,26 \text{ m}^3$$



PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - TĚŽIŠTĚ

Složené obrazce

OBRAZEC 1

$$A_1 = b_1 h_1 = 1,0 \cdot 0,25 = 0,25 \text{ m}^2$$

$$S_{xz,1} = A_1 \cdot y_{c,1} = 0,25 \cdot 0,5 = 0,125 \text{ m}^3$$

$$S_{xy,1} = A_1 \cdot z_{c,1} = 0,25 \cdot 0,125 = 0,03125 \text{ m}^3$$

OBRAZEC 2

$$A_2 = b_2 h_2 = 0,5 \cdot 0,8 = 0,4 \text{ m}^2$$

$$S_{xz,2} = A_2 \cdot y_{c,2} = 0,4 \cdot 0,5 = 0,2 \text{ m}^3$$

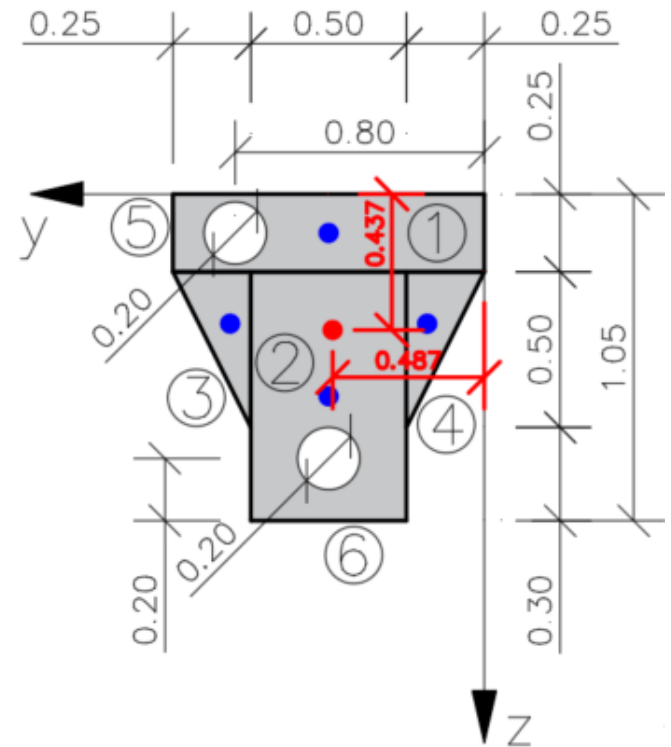
$$S_{xy,2} = A_2 \cdot z_{c,2} = 0,4 \cdot 0,65 = 0,26 \text{ m}^3$$

OBRAZEC 3

$$A_3 = 0,5 b_3 h_3 = 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,25 = 0,0625 \text{ m}^2$$

$$S_{xz,3} = A_3 \cdot y_{c,3} = 0,0625 \cdot 0,833 = 0,052 \text{ m}^3$$

$$S_{xy,3} = A_3 \cdot z_{c,3} = 0,0625 \cdot 0,417 = 0,026 \text{ m}^3$$



PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - TĚŽIŠTĚ

Složené obrazce

OBRAZEC 1

$$A_1 = b_1 h_1 = 1,0 \cdot 0,25 = 0,25 \text{ m}^2$$

$$S_{xz,1} = A_1 \cdot y_{c,1} = 0,25 \cdot 0,5 = 0,125 \text{ m}^3$$

$$S_{xy,1} = A_1 \cdot z_{c,1} = 0,25 \cdot 0,125 = 0,03125 \text{ m}^3$$

OBRAZEC 2

$$A_2 = b_2 h_2 = 0,5 \cdot 0,8 = 0,4 \text{ m}^2$$

$$S_{xz,2} = A_2 \cdot y_{c,2} = 0,4 \cdot 0,5 = 0,2 \text{ m}^3$$

$$S_{xy,2} = A_2 \cdot z_{c,2} = 0,4 \cdot 0,65 = 0,26 \text{ m}^3$$

OBRAZEC 3

$$A_3 = 0,5 b_3 h_3 = 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,25 = 0,0625 \text{ m}^2$$

$$S_{xz,3} = A_3 \cdot y_{c,3} = 0,0625 \cdot 0,833 = 0,052 \text{ m}^3$$

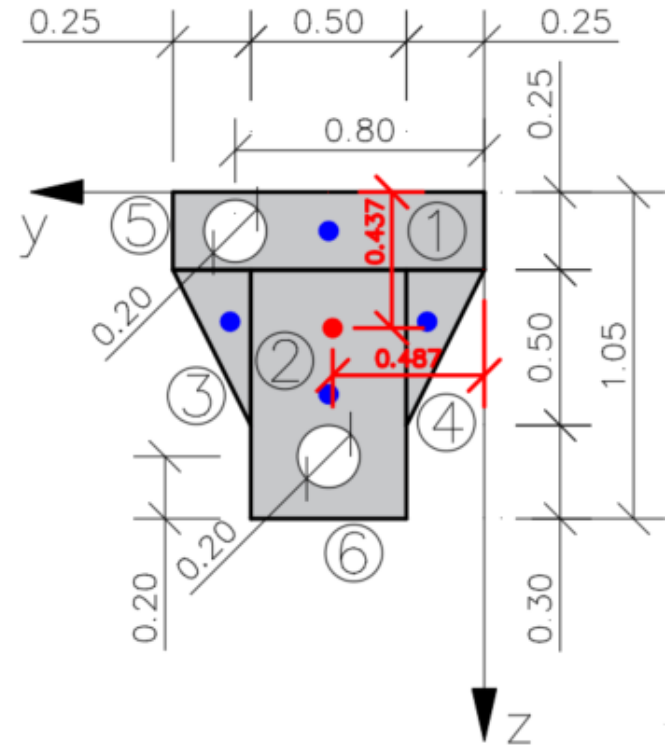
$$S_{xy,3} = A_3 \cdot z_{c,3} = 0,0625 \cdot 0,417 = 0,026 \text{ m}^3$$

OBRAZEC 4

$$A_4 = 0,5 b_4 h_4 = 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,25 = 0,0625 \text{ m}^2$$

$$S_{xz,4} = A_4 \cdot y_{c,4} = 0,0625 \cdot 0,167 = 0,01 \text{ m}^3$$

$$S_{xy,4} = A_4 \cdot z_{c,4} = 0,0625 \cdot 0,417 = 0,026 \text{ m}^3$$



PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - TĚŽIŠTĚ

Složené obrazce

OBRAZEC 1

$$A_1 = b_1 h_1 = 1.0,25 = 0,25 \text{ m}^2$$

$$S_{xz,1} = A_1 \cdot y_{c,1} = 0,25 \cdot 0,5 = 0,125 \text{ m}^3$$

$$S_{xy,1} = A_1 \cdot z_{c,1} = 0,25 \cdot 0,125 = 0,03125 \text{ m}^3$$

OBRAZEC 2

$$A_2 = b_2 h_2 = 0,5 \cdot 0,8 = 0,4 \text{ m}^2$$

$$S_{xz,2} = A_2 \cdot y_{c,2} = 0,4 \cdot 0,5 = 0,2 \text{ m}^3$$

$$S_{xy,2} = A_2 \cdot z_{c,2} = 0,4 \cdot 0,65 = 0,26 \text{ m}^3$$

OBRAZEC 3

$$\overline{A_3} = 0,5b_3h_3 = 0,5.0,5.0,25 = 0,0625 \text{ m}^2$$

$$S_{xz,3} = A_3 \cdot y_{c,3} = 0,0625 \cdot 0,833 = 0,052 \text{ m}^3$$

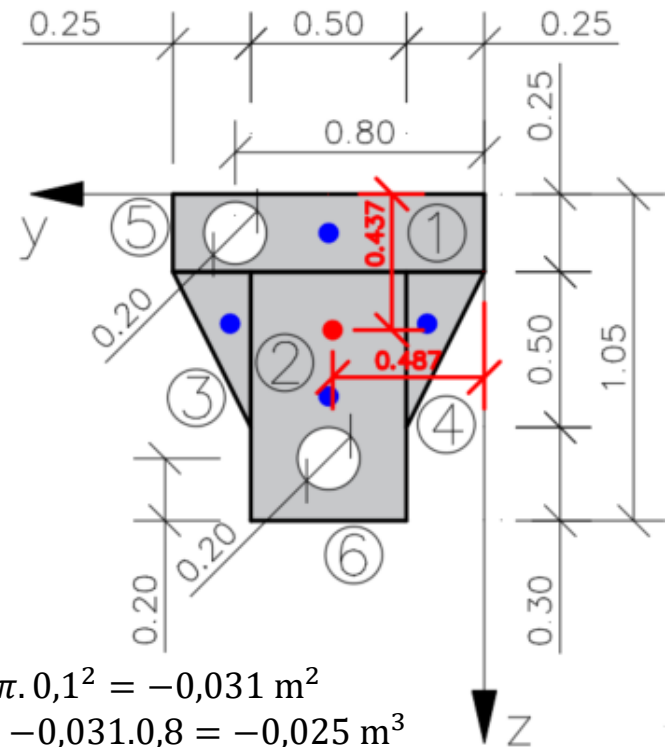
$$S_{xy,3} = A_3 \cdot z_{c,3} = 0,0625 \cdot 0,417 = 0,026 \text{ m}^3$$

OBRAZEC 4

$$A_4 = 0,5b_4h_4 = 0,5.0,5.0,25 = 0,0625 \text{ m}^2$$

$$S_{xz,4} = A_{4 \cdot} y_{c,4} = 0,0625 \cdot 0,167 = 0,01 \text{ m}^3$$

$$S_{xy,4} = A_4 \cdot z_{c,4} = 0,0625 \cdot 0,417 = 0,026 \text{ m}^3$$



OBRAZEC 5

$$\overline{A_5} = -\pi \cdot r_5^2 = -\pi \cdot 0,1^2 = -0,031 \text{ m}^2$$

$$S_{xz,5} = A_5 \cdot y_{c,5} = -0,031 \cdot 0,8 = -0,025 \text{ m}^3$$

$$S_{xy,5} = A_5 \cdot z_{c,5} = -0,031 \cdot 0,125 = -0,004 \text{ m}^3$$

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - TĚŽIŠTĚ

Složené obrazce

OBRAZEC 1

$$A_1 = b_1 h_1 = 1,0 \cdot 0,25 = 0,25 \text{ m}^2$$

$$S_{xz,1} = A_1 \cdot y_{c,1} = 0,25 \cdot 0,5 = 0,125 \text{ m}^3$$

$$S_{xy,1} = A_1 \cdot z_{c,1} = 0,25 \cdot 0,125 = 0,03125 \text{ m}^3$$

OBRAZEC 2

$$A_2 = b_2 h_2 = 0,5 \cdot 0,8 = 0,4 \text{ m}^2$$

$$S_{xz,2} = A_2 \cdot y_{c,2} = 0,4 \cdot 0,5 = 0,2 \text{ m}^3$$

$$S_{xy,2} = A_2 \cdot z_{c,2} = 0,4 \cdot 0,65 = 0,26 \text{ m}^3$$

OBRAZEC 3

$$A_3 = 0,5 b_3 h_3 = 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,25 = 0,0625 \text{ m}^2$$

$$S_{xz,3} = A_3 \cdot y_{c,3} = 0,0625 \cdot 0,833 = 0,052 \text{ m}^3$$

$$S_{xy,3} = A_3 \cdot z_{c,3} = 0,0625 \cdot 0,417 = 0,026 \text{ m}^3$$

OBRAZEC 4

$$A_4 = 0,5 b_4 h_4 = 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,25 = 0,0625 \text{ m}^2$$

$$S_{xz,4} = A_4 \cdot y_{c,4} = 0,0625 \cdot 0,167 = 0,01 \text{ m}^3$$

$$S_{xy,4} = A_4 \cdot z_{c,4} = 0,0625 \cdot 0,417 = 0,026 \text{ m}^3$$

OBRAZEC 5

$$A_5 = -\pi \cdot r_5^2 = -\pi \cdot 0,1^2 = -0,031 \text{ m}^2$$

$$S_{xz,5} = A_5 \cdot y_{c,5} = -0,031 \cdot 0,8 = -0,025 \text{ m}^3$$

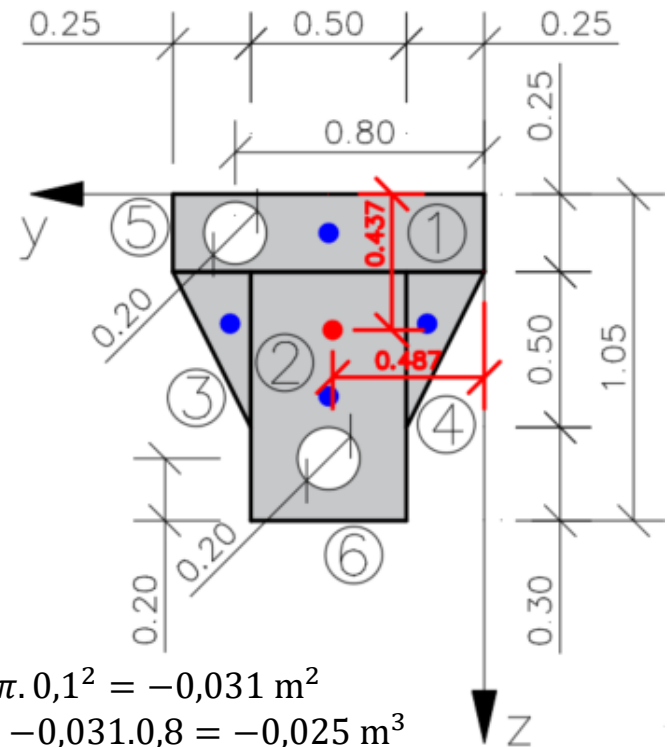
$$S_{xy,5} = A_5 \cdot z_{c,5} = -0,031 \cdot 0,125 = -0,004 \text{ m}^3$$

OBRAZEC 6

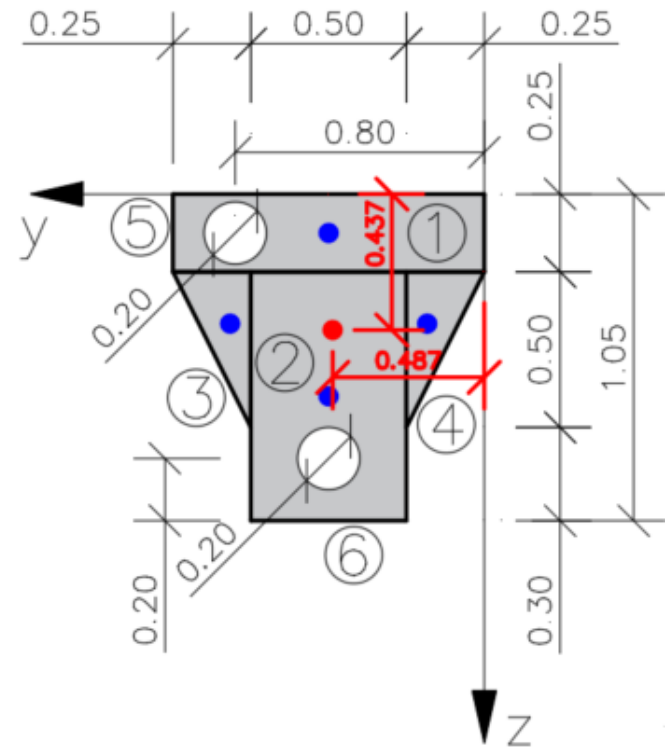
$$A_6 = -\pi \cdot r_6^2 = -\pi \cdot 0,1^2 = -0,031 \text{ m}^2$$

$$S_{xz,6} = A_6 \cdot y_{c,6} = -0,031 \cdot 0,5 = -0,016 \text{ m}^3$$

$$S_{xy,6} = A_6 \cdot z_{c,6} = -0,031 \cdot 0,9 = -0,028 \text{ m}^3$$



PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - TĚŽIŠTĚ



SOUŘADNICE TĚŽIŠTĚ

$$Ay_c = S_{xz,1} + S_{xz,2} + S_{xz,3} + S_{xz,4} + S_{xz,5} + S_{xz,6}$$

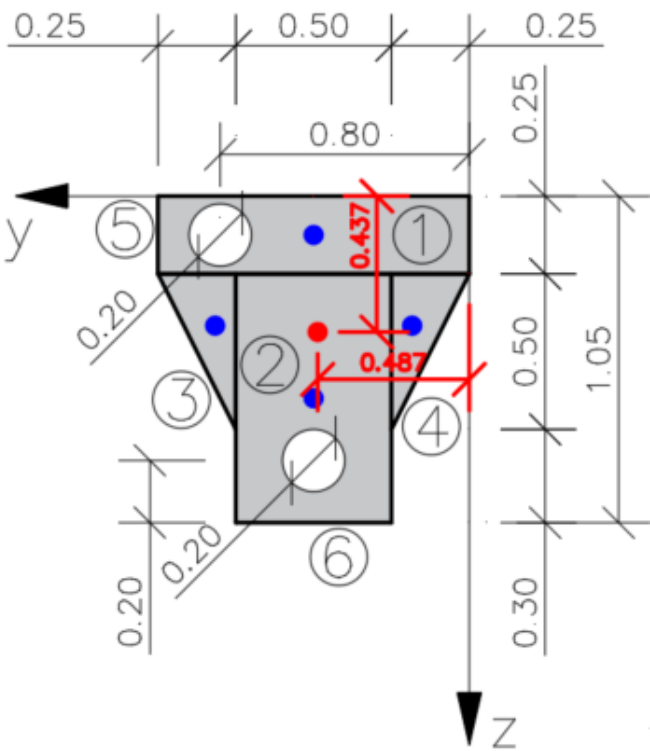
$$y_c = \frac{0,125 + 0,2 + 0,052 + 0,01 - 0,025 - 0,016}{0,712} = 0,487 \text{ m}$$

$$Az_c = S_{xy,1} + S_{xy,2} + S_{xz,3} + S_{xz,4} + S_{xz,5} + S_{xz,6}$$

$$z_c = \frac{0,031 + 0,26 + 0,026 + 0,026 - 0,004 - 0,028}{0,712} = 0,437 \text{ m}$$

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - TĚŽIŠTĚ

	1	2	3	4	5	6
B [m]	1	0.5	0.25	0.25	0.2	0.2
H [m]	0.25	0.8	0.5	0.5		
A [m ²]	0.25	0.4	0.063	0.063	-0.031	-0.031
y _{c,i} [m]	0.5	0.5	0.833	0.167	0.8	0.5
z _{c,i} [m]	0.125	0.65	0.417	0.417	0.125	0.9
Ac _y [m ³]	0.125	0.2	0.052	0.01	-0.025	-0.016
Ac _z [m ³]	0.031	0.26	0.026	0.026	-0.004	-0.028



SOUŘADNICE TĚŽIŠTĚ

$$Ay_c = S_{xz,1} + S_{xz,2} + S_{xz,3} + S_{xz,4} + S_{xz,5} + S_{xz,6}$$

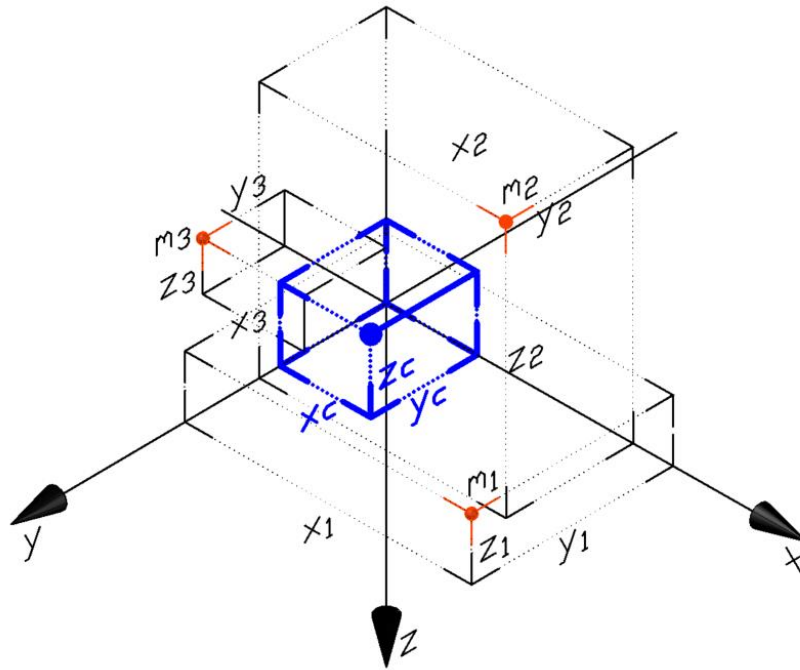
$$y_c = \frac{0,125 + 0,2 + 0,052 + 0,01 - 0,025 - 0,016}{0,712} = 0,487 \text{ m}$$

$$Az_c = S_{xy,1} + S_{xy,2} + S_{xz,3} + S_{xz,4} + S_{xz,5} + S_{xz,6}$$

$$z_c = \frac{0,031 + 0,26 + 0,026 + 0,026 - 0,004 - 0,028}{0,712} = 0,437 \text{ m}$$

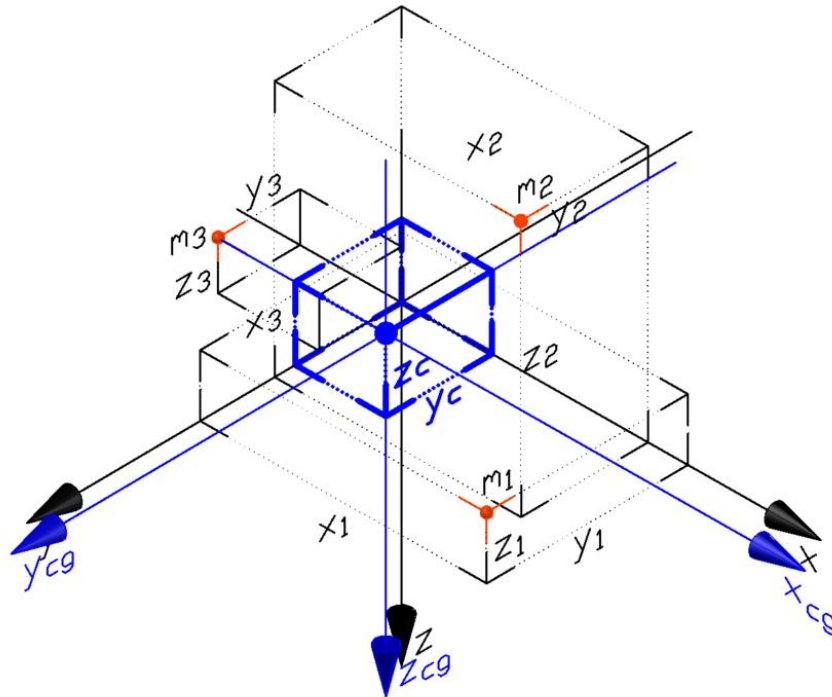
- TĚŽIŠTĚ
- **MOMENT SETRVAČNOSTI**
- POLOMĚR SETRVAČNOSTI

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI



Pro další výpočty přesuneme počátek souřadnicového systému do těžiště soustavy cg (centre of gravity). Souřadnice y a z vztahujeme k tomuto počátku.

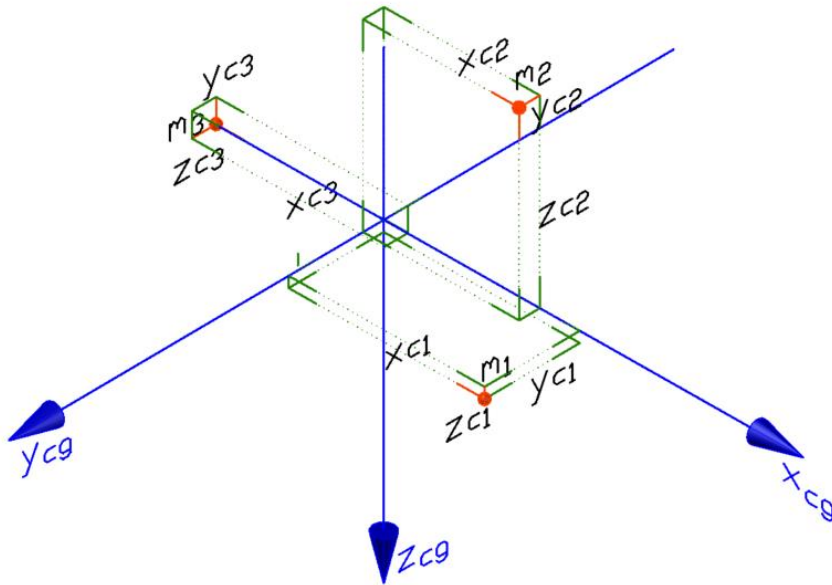
PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI



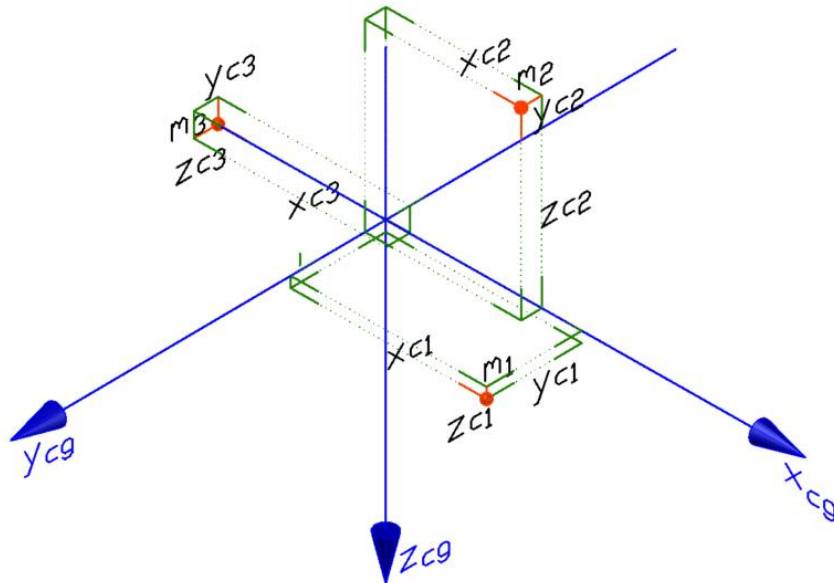
Pro další výpočty přesuneme počátek souřadnicového systému do těžiště soustavy cg (centre of gravity). Souřadnice y a z vztahujeme k tomuto počátku.

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI

Pro další výpočty přesuneme počátek souřadnicového systému do těžiště soustavy cg (centre of gravity). Souřadnice y a z vztahujeme k tomuto počátku.



PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI



Moment síly

Kinetická síla

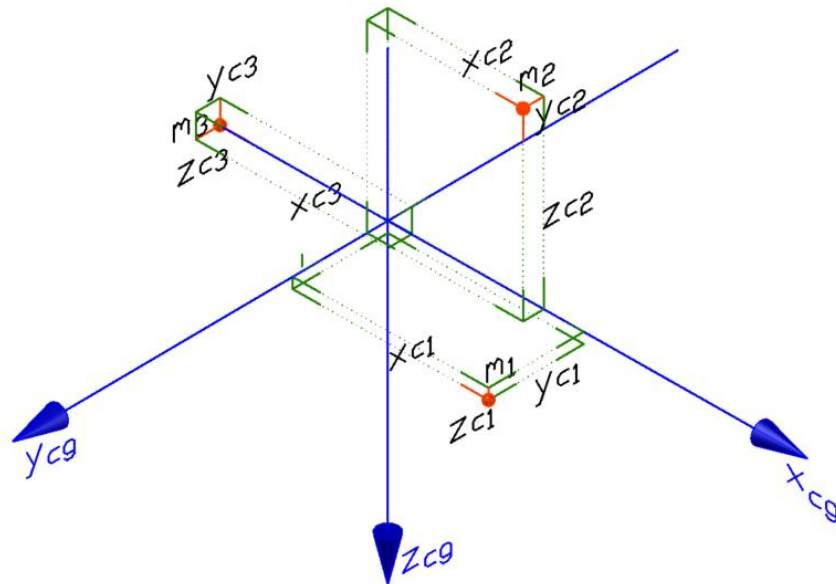
$$M = I_0 \alpha$$

$$F = ma$$

α – úhlové zrychlení

Stejně jako hmotnost m brání změně lineárního pohybu, tak moment setrvačnosti I_0 brání změně rotačního pohybu. Velikost momentu setrvačnosti je závislý na rozložení hmotnosti okolo osy otáčení.

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI



Moment síly

Kinetická síla

$$M = I_0 \alpha$$

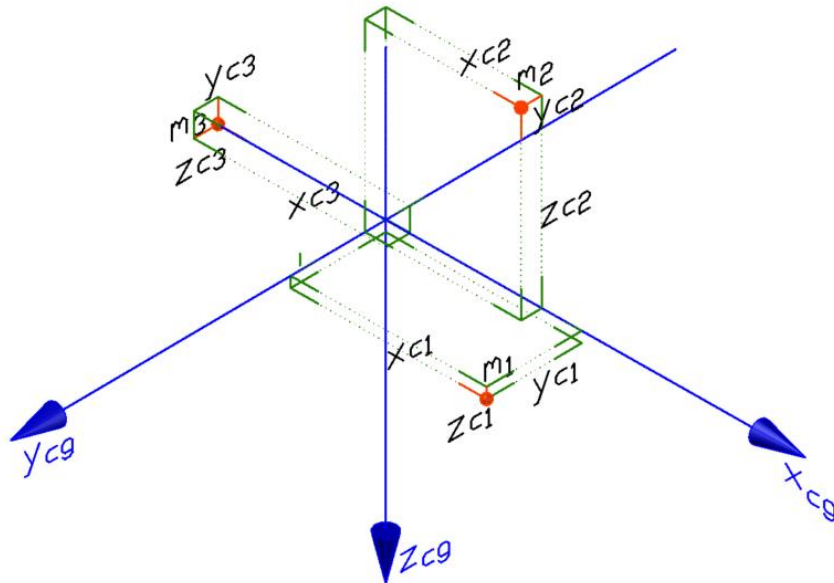
$$F = ma$$

α – úhlové zrychlení

Stejně jako hmotnost m brání změně lineárního pohybu, tak moment setrvačnosti I_0 brání změně rotačního pohybu. Velikost momentu setrvačnosti je závislý na rozložení hmotnosti okolo osy otáčení.

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI



Moment síly

Kinetická síla

$$M = I_0 \alpha$$

$$F = ma$$

α – úhlové zrychlení

Stejně jako hmotnost m brání změně lineárního pohybu, tak moment setrvačnosti I_0 brání změně rotačního pohybu. Velikost momentu setrvačnosti je závislý na rozložení hmotnosti okolo osy otáčení.

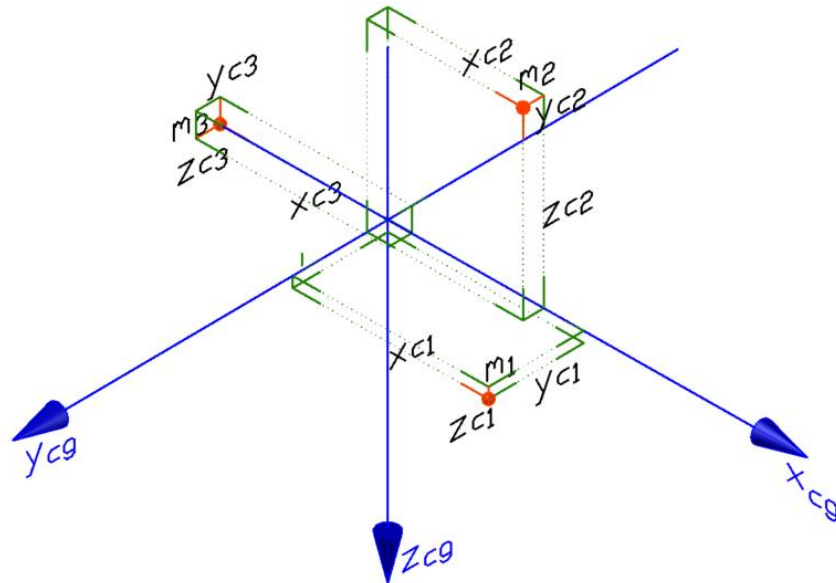
$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \mathbf{a} m = \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}) m \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M} = (\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\alpha})) m$$

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{pmatrix}$$

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI



Moment síly

Kinetická síla

$$M = I_0 \alpha$$

$$F = ma$$

α – úhlové zrychlení

Stejně jako hmotnost m brání změně lineárního pohybu, tak moment setrvačnosti I_0 brání změně rotačního pohybu. Velikost momentu setrvačnosti je závislý na rozložení hmotnosti okolo osy otáčení.

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \mathbf{a} m = \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}) m \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}$$

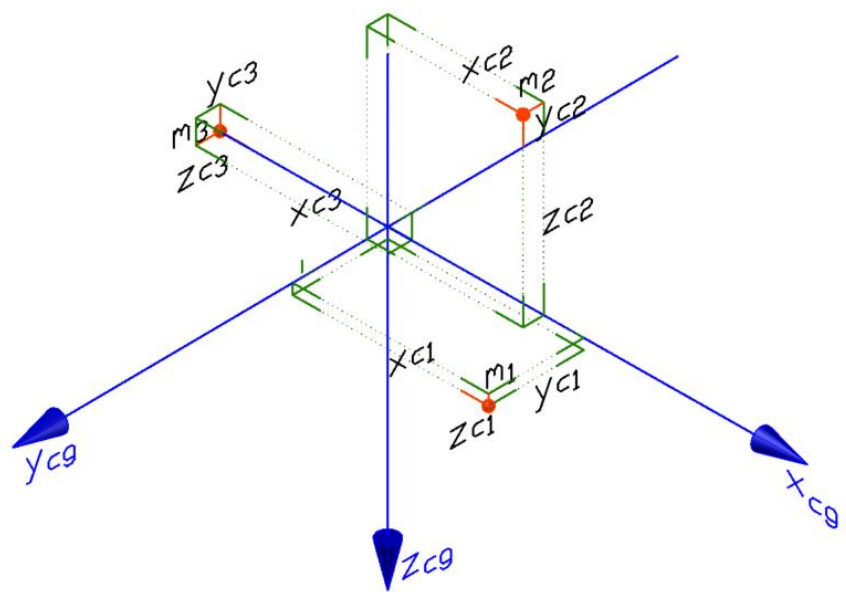
$$\mathbf{M} = (\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\alpha})) m$$

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{pmatrix} \|\mathbf{r}\|^2 - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} (x\alpha_x + y\alpha_y + z\alpha_z) m$$

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{pmatrix}$$

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI



Moment síly

Kinetická síla

$$M = I_0 \alpha$$

$$F = ma$$

α – úhlové zrychlení

Stejně jako hmotnost m brání změně lineárního pohybu, tak moment setrvačnosti I_0 brání změně rotačního pohybu. Velikost momentu setrvačnosti je závislý na rozložení hmotnosti okolo osy otáčení.

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \mathbf{a} m = \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}) m$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}$$

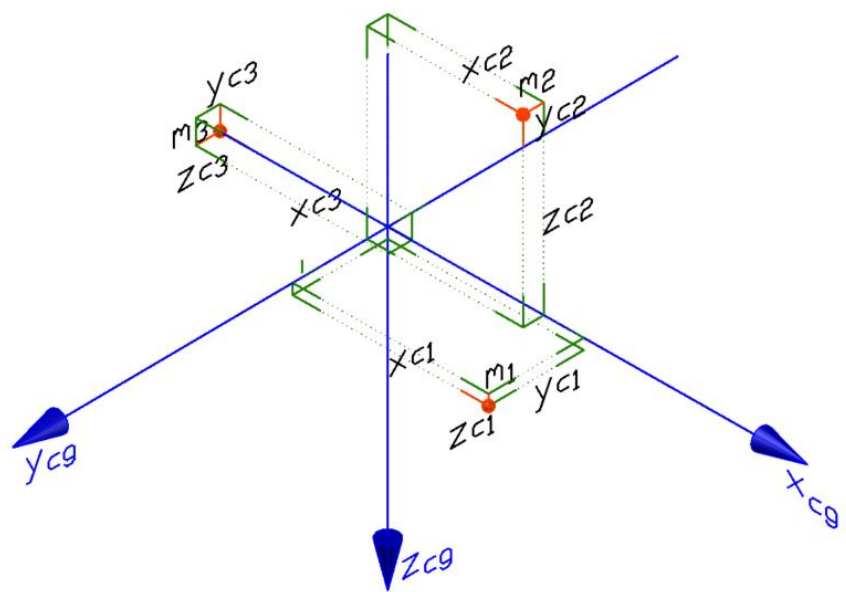
$$\mathbf{M} = (\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\alpha})) m$$

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_x(x^2 + y^2 + z^2) - x(\alpha_x x + \alpha_y y + \alpha_z z) \\ \alpha_y(x^2 + y^2 + z^2) - y(\alpha_x x + \alpha_y y + \alpha_z z) \\ \alpha_z(x^2 + y^2 + z^2) - z(\alpha_x x + \alpha_y y + \alpha_z z) \end{pmatrix} m = \begin{pmatrix} \alpha_x(y^2 + z^2) - \alpha_y xy - \alpha_z xz \\ \alpha_y(x^2 + z^2) - \alpha_x xy - \alpha_z yz \\ \alpha_z(x^2 + y^2) - \alpha_x xz - \alpha_y yz \end{pmatrix} m$$

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{pmatrix}$$

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI



Moment síly

Kinetická síla

$$M = I_0 \alpha$$

$$F = ma$$

α – úhlové zrychlení

Stejně jako hmotnost m brání změně lineárního pohybu, tak moment setrvačnosti I_0 brání změně rotačního pohybu. Velikost momentu setrvačnosti je závislý na rozložení hmotnosti okolo osy otáčení.

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \mathbf{a} m = \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}) m \qquad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M} = (\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r}.\mathbf{r}) - \mathbf{r}(\mathbf{r}.\boldsymbol{\alpha})) m$$

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_x(x^2 + y^2 + z^2) - x(\alpha_x x + \alpha_y y + \alpha_z z) \\ \alpha_y(x^2 + y^2 + z^2) - y(\alpha_x x + \alpha_y y + \alpha_z z) \\ \alpha_z(x^2 + y^2 + z^2) - z(\alpha_x x + \alpha_y y + \alpha_z z) \end{pmatrix} m = \begin{pmatrix} \alpha_x(y^2 + z^2) - \alpha_y xy - \alpha_z xz \\ \alpha_y(x^2 + z^2) - \alpha_x xy - \alpha_z yz \\ \alpha_z(x^2 + y^2) - \alpha_x xz - \alpha_y yz \end{pmatrix} m$$

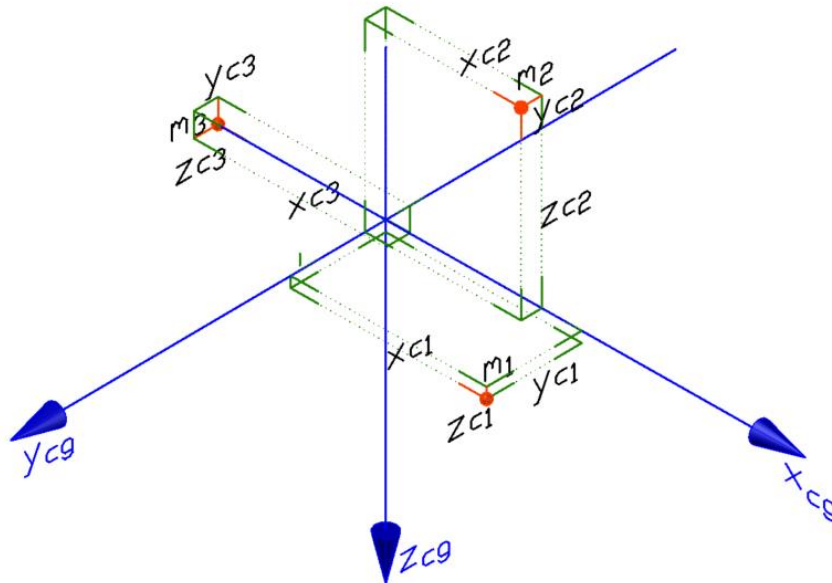
$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (y^2 + z^2)m & -(xy)m & -(xz)m \\ -(xy)m & (x^2 + z^2)m & -(yz)m \\ -(xz)m & -(yz)m & (x^2 + y^2)m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -D_{xy} & -D_{xz} \\ -D_{xy} & I_{yy} & -D_{yz} \\ -D_{xz} & -D_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{pmatrix} = \mathbf{I} \boldsymbol{\alpha}$$

I – tenzor setrvačnosti

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI



Polární moment setrvačnosti k počátku

$$I_0 = \sum_{i=1}^n m_i (x_{c,i}^2 + y_{c,i}^2 + z_{c,i}^2)$$

Axiální momenty setrvačnosti k souřadnicovým osám

$$I_x = \sum_{i=1}^n m_i (y_{c,i}^2 + z_{c,i}^2)$$

$$I_y = \sum_{i=1}^n m_i (x_{c,i}^2 + z_{c,i}^2)$$

$$I_z = \sum_{i=1}^n m_i (x_{c,i}^2 + y_{c,i}^2)$$

Planární momenty setrvačnosti k souřadnicovým rovinám

$$I_{xy} = \sum_{i=1}^n m_i (z_{c,i}^2)$$

$$I_{yz} = \sum_{i=1}^n m_i (x_{c,i}^2)$$

$$I_{xz} = \sum_{i=1}^n m_i (y_{c,i}^2)$$

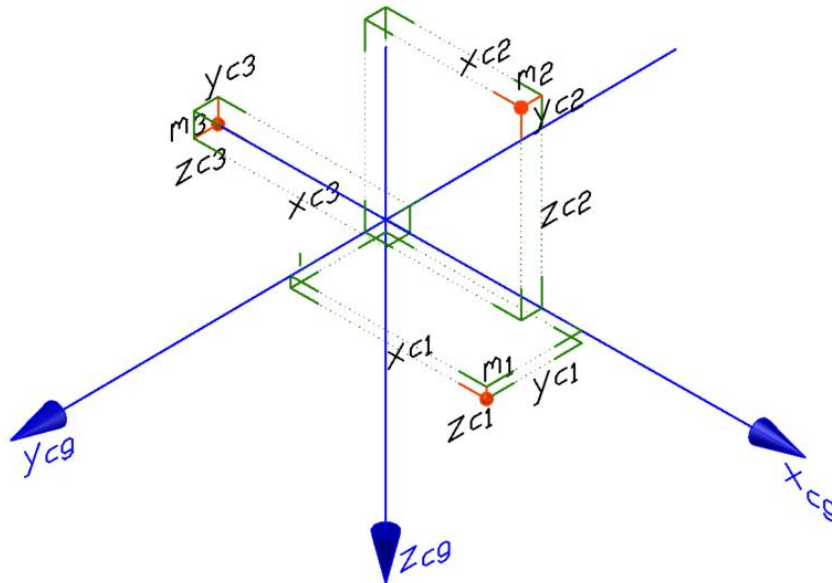
Deviční momenty k souřadnicovým osám

$$D_{xy} = \sum_{i=1}^n m_i (x_{c,i} y_{c,i})$$

$$D_{yz} = \sum_{i=1}^n m_i (y_{c,i} z_{c,i})$$

$$D_{xz} = \sum_{i=1}^n m_i (x_{c,i} z_{c,i})$$

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI



Polární moment setrvačnosti k počátku

$$I_0 = \sum_{i=1}^n m_i (x_{c,i}^2 + y_{c,i}^2 + z_{c,i}^2)$$

Axiální momenty setrvačnosti k souřadnicovým osám

$$I_x = \sum_{i=1}^n m_i (y_{c,i}^2 + z_{c,i}^2)$$

$$I_y = \sum_{i=1}^n m_i (x_{c,i}^2 + z_{c,i}^2)$$

$$I_z = \sum_{i=1}^n m_i (x_{c,i}^2 + y_{c,i}^2)$$

Moment setrvačnosti
okolo osy x při rotaci
okolo osy x

Planární momenty setrvačnosti k souřadnicovým rovinám

$$I_{xy} = \sum_{i=1}^n m_i (z_{c,i}^2)$$

$$I_{yz} = \sum_{i=1}^n m_i (x_{c,i}^2)$$

$$I_{xz} = \sum_{i=1}^n m_i (y_{c,i}^2)$$

Deviční momenty k souřadnicovým osám

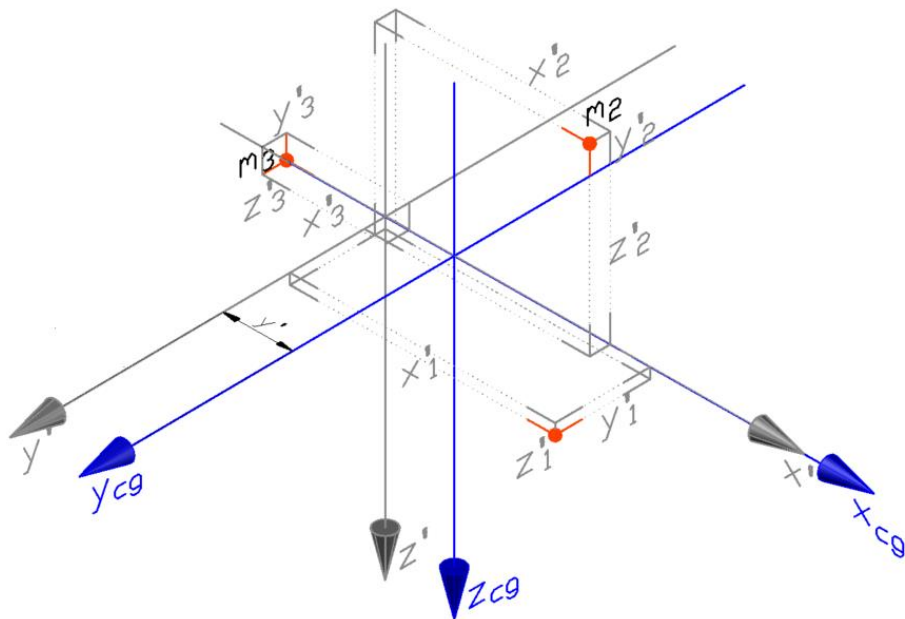
$$D_{xy} = \sum_{i=1}^n m_i (x_{c,i} y_{c,i})$$

$$D_{yz} = \sum_{i=1}^n m_i (y_{c,i} z_{c,i})$$

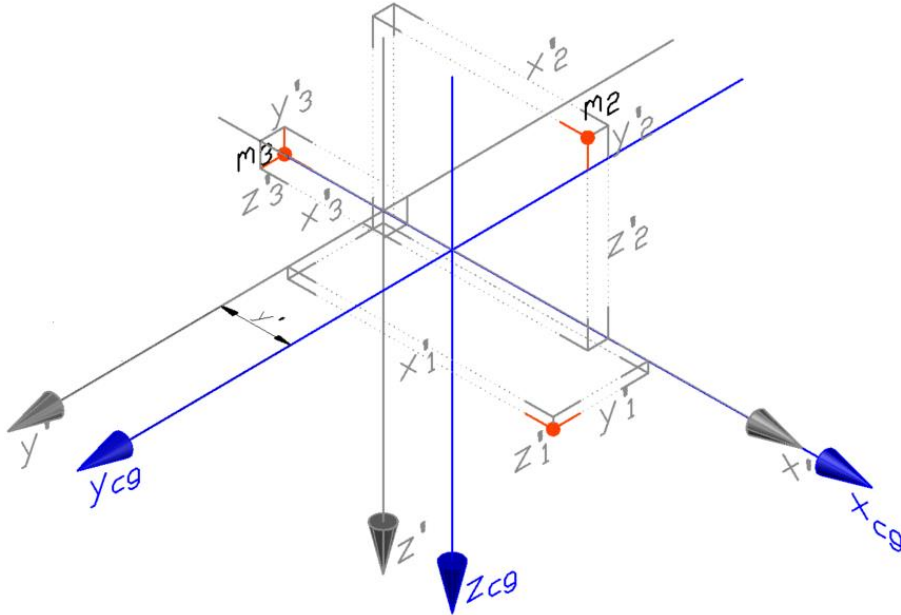
$$D_{xz} = \sum_{i=1}^n m_i (x_{c,i} z_{c,i})$$

Moment setrvačnosti
okolo osy x při rotaci
okolo osy y

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI



PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI



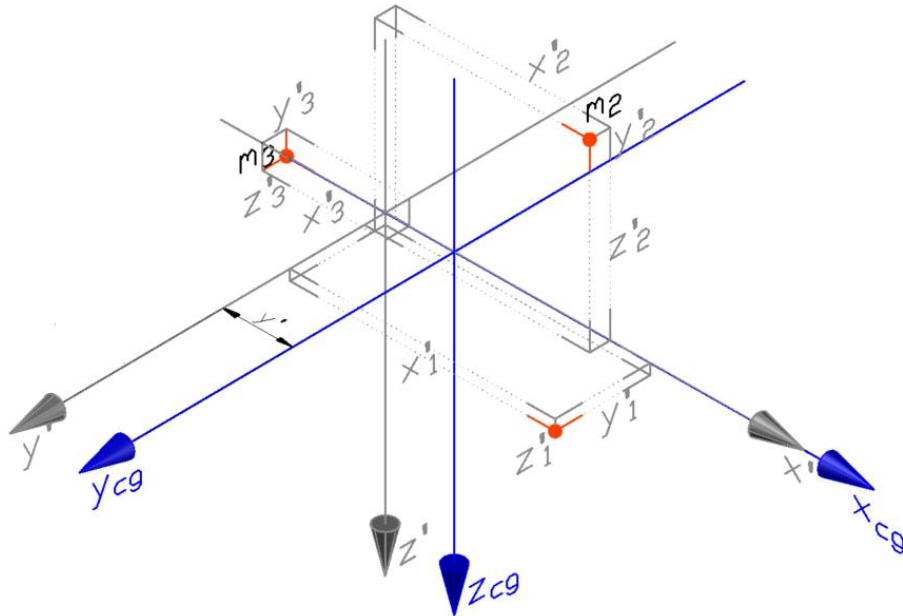
Moment setrvačnosti k různým paralelním osám nabývá různých hodnot.

Minimální moment setrvačnosti je vždy vztažen k těžišti soustavy.

STEINEROVA VĚTA

Moment setrvačnosti k mimotěžišťové ose je roven součtu momentů k těžištní ose ($I_{x,cg}$) a součinu hmotnosti a čtverce vzdálenosti obou rovnoběžných os ($m(y'^2 + z'^2)$).

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI



Moment setrvačnosti k souřadnicovým osám

$$I_x = I_{x,cg} + m(y'^2 + z'^2)$$

$$I_y = I_{y,cg} + m(x'^2 + z'^2)$$

$$I_z = I_{z,cg} + m(x'^2 + y'^2)$$

Deviační momenty k souřadnicovým osám

$$D_{xy} = D_{xy,cg} + mx'y'$$

$$D_{yz} = D_{yz,cg} + my'z'$$

$$D_{xz} = D_{xz,cg} + mx'z'$$

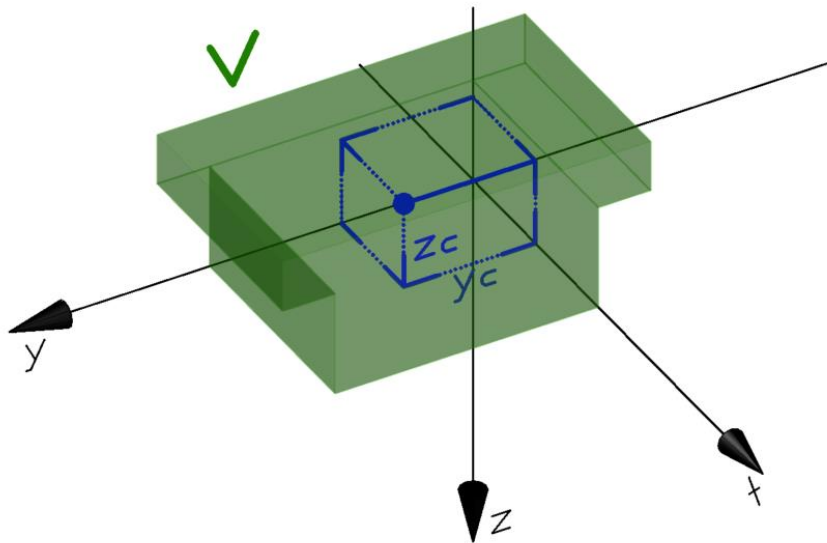
Moment setrvačnosti k různým paralelním osám nabývá různých hodnot.

Minimální moment setrvačnosti je vždy vztažen k těžišti soustavy.

STEINEROVA VĚTA

Moment setrvačnosti k mimotěžišťové ose je roven součtu momentů k těžištní ose ($I_{x,cg}$) a součinu hmotnosti a čtverce vzdálenosti obou rovnoběžných os ($m(y'^2 + z'^2)$).

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI



Moment setrvačnosti k hlavním osám

$$I_x = \int_m y^2 + z^2 dm$$

$$I_y = \int_m x^2 + z^2 dm$$

$$I_z = \int_m x^2 + y^2 dm$$

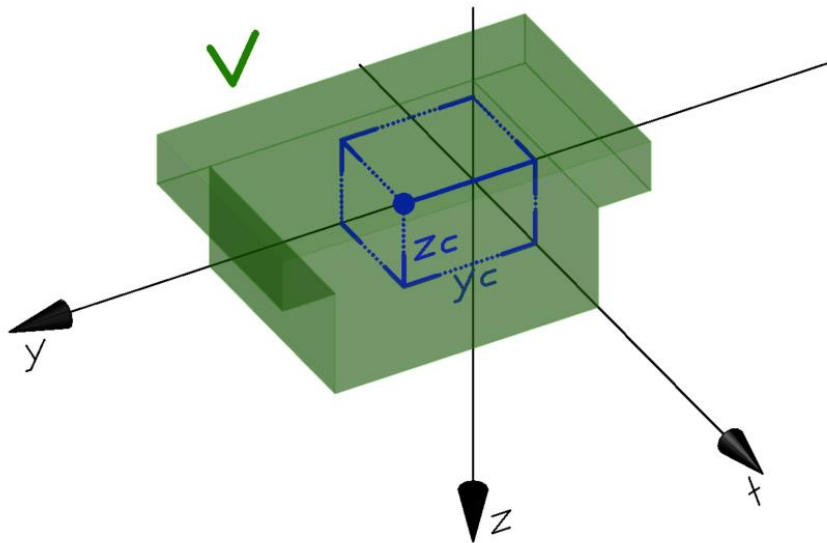
Deviační momenty k souřadnicovým rovinám

$$D_{xy} = \int_m x y dm$$

$$D_{yz} = \int_m y z dm$$

$$D_{xz} = \int_m x z dm$$

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI



Moment setrvačnosti k hlavním osám

$$I_x = \int_V y^2 + z^2 dV$$

$$I_y = \int_V x^2 + z^2 dV$$

$$I_z = \int_V x^2 + y^2 dV$$

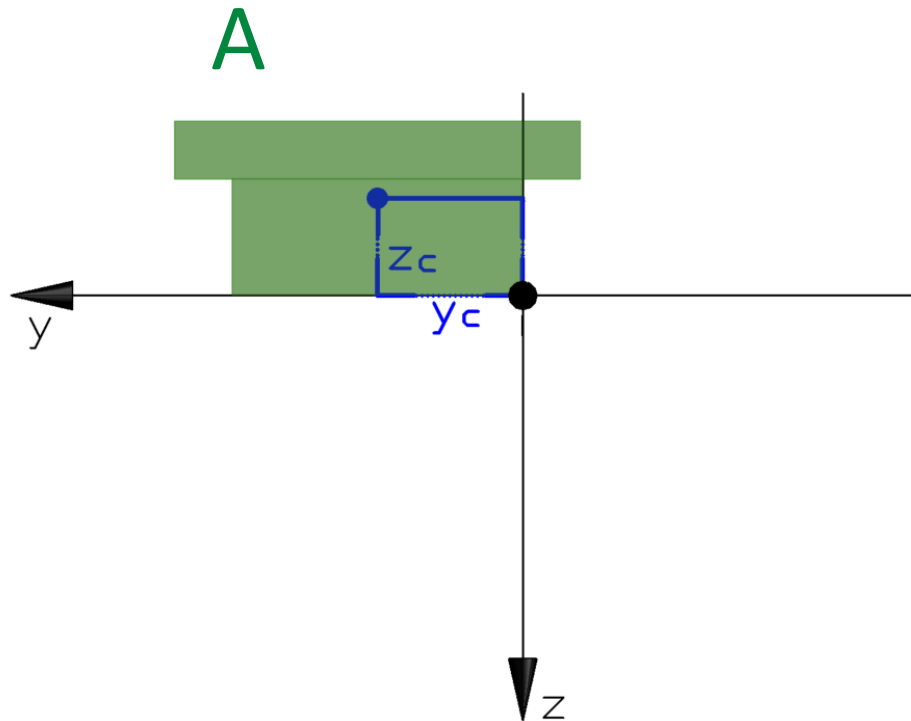
Deviační momenty k souřadnicovým rovinám

$$D_{xy} = \int_V x y dV$$

$$D_{yz} = \int_V y z dV$$

$$D_{xz} = \int_V x z dV$$

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI



Moment setrvačnosti k hlavním osám

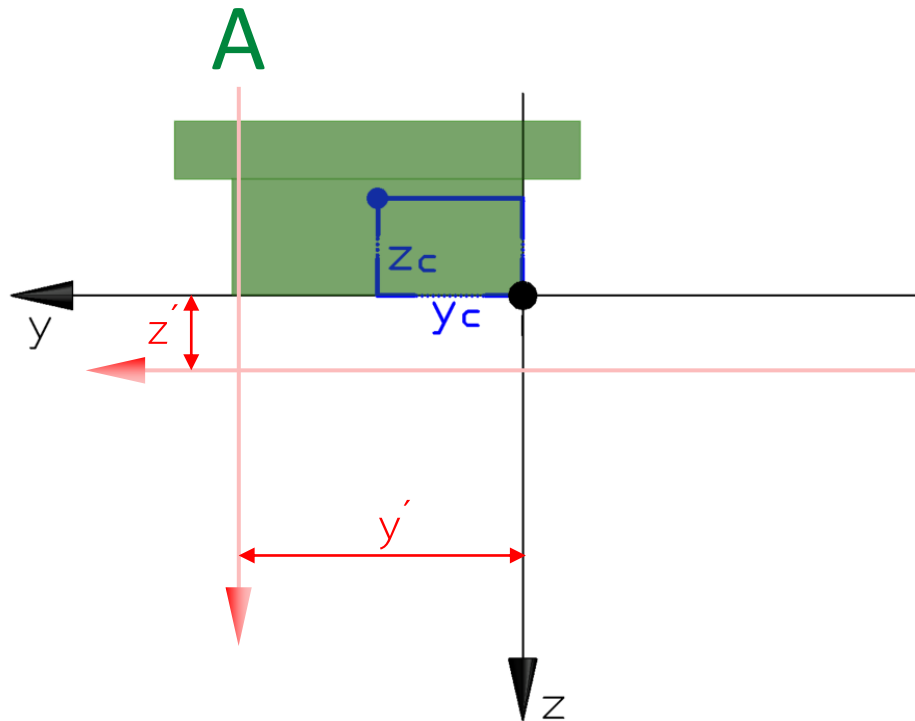
$$I_y = \int_A z^2 dA$$

$$I_z = \int_A y^2 dA$$

Deviační momenty k souřadnicovým rovinám

$$D_{yz} = \int_A y z dA$$

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI



Moment setrvačnosti k hlavním osám

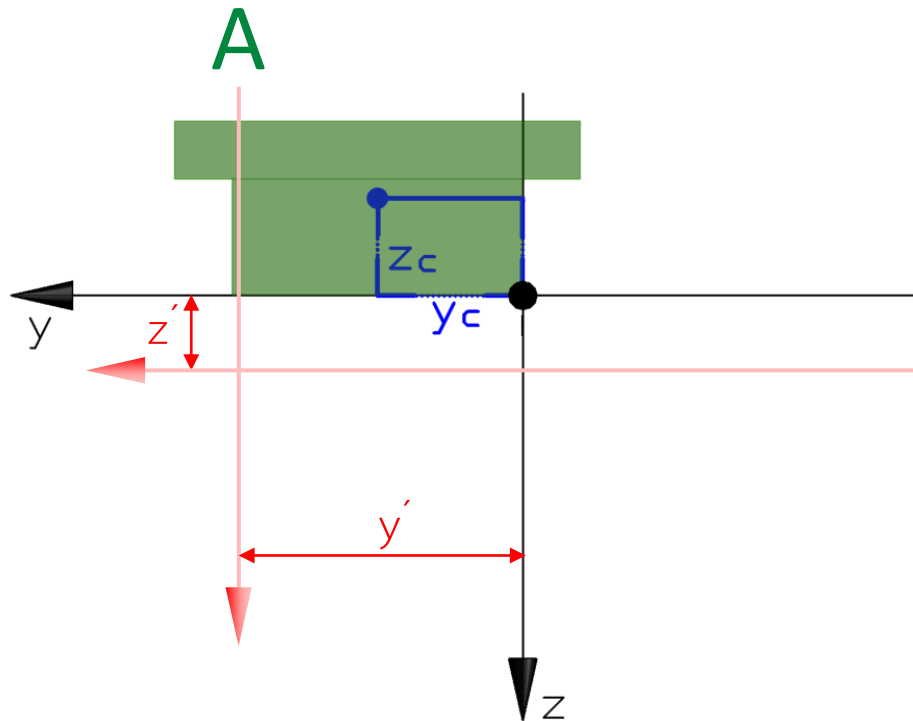
$$I_y = \int_A z^2 dA + Az'^2$$

$$I_z = \int_A y^2 dA + Ay'^2$$

Deviační momenty k souřadnicovým rovinám

$$D_{yz} = \int_A y z dA + Ay'z'$$

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI



Moment setrvačnosti k hlavním osám

$$I_y = \int_A z^2 dA + Az'^2 = I_{y,cg} + Az'^2$$

$$I_z = \int_A y^2 dA + Ay'^2 = I_{z,cg} + Ay'^2$$

Deviační momenty k souřadnicovým rovinám

$$D_{yz} = \int_A y z dA + Ay'z' = D_{yz,cg} + Ay'z'$$

Moment setrvačnosti plošného obrazce představuje odolnost obrazce vůči ohybu.

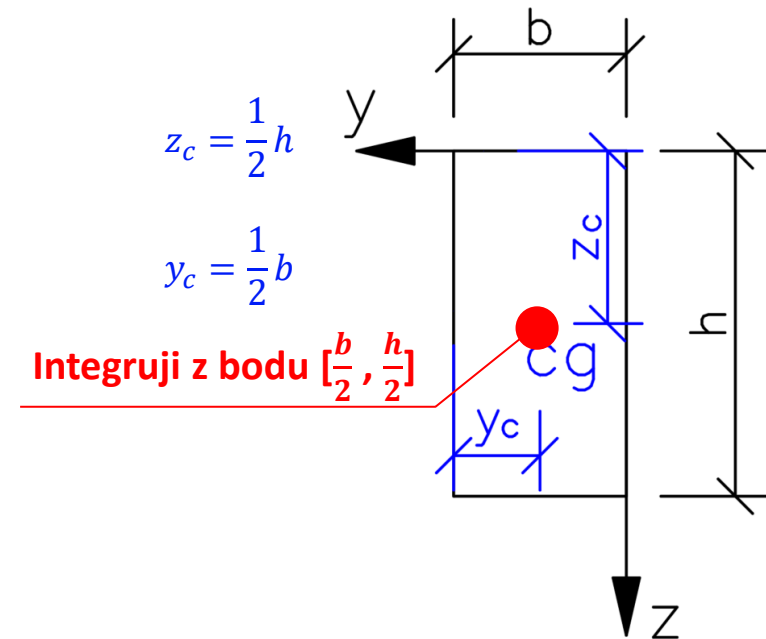
PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI

Integrace obrazce k těžišti - obdélník

$$I_{y, cg}$$

$$I_{z, cg}$$

$$D_{yz, cg}$$



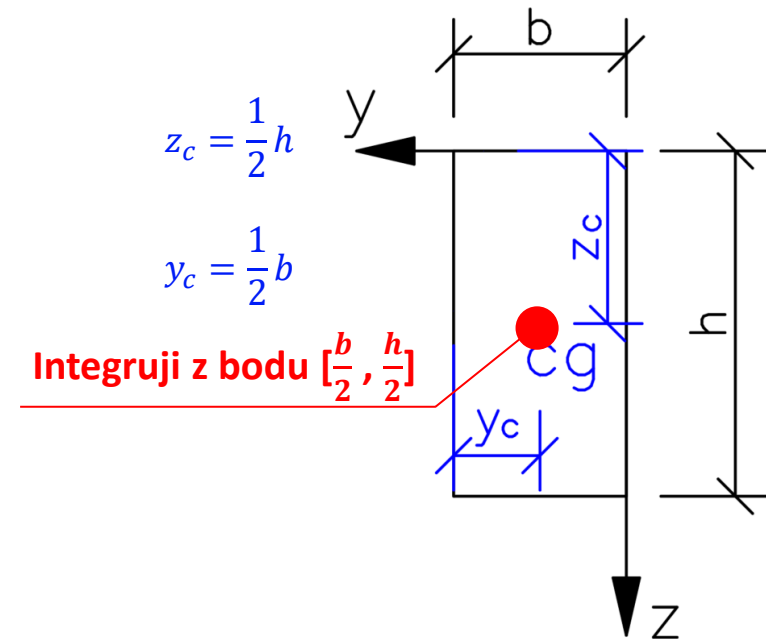
PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI

Integrace obrazce k těžišti - obdélník

$$I_{y,cg} = \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} z^2 dy dz$$

$$I_{z,cg}$$

$$D_{yz,cg}$$



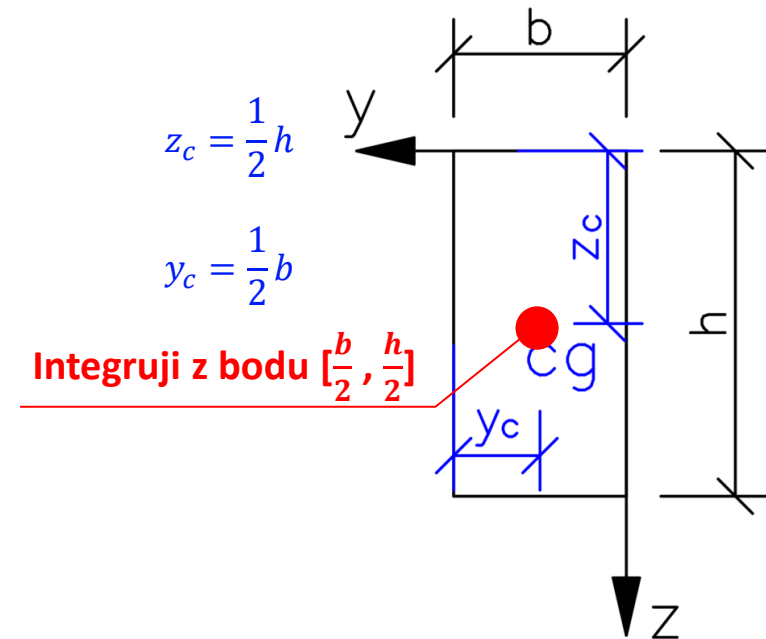
PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI

Integrace obrazce k těžišti - obdélník

$$I_{y,cg} = \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} z^2 dy dz = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 b dz = b \left[\frac{1}{3} z^3 \right]_{-h/2}^{h/2} = \frac{1}{12} b h^3$$

$I_{z,cg}$

$D_{yz,cg}$



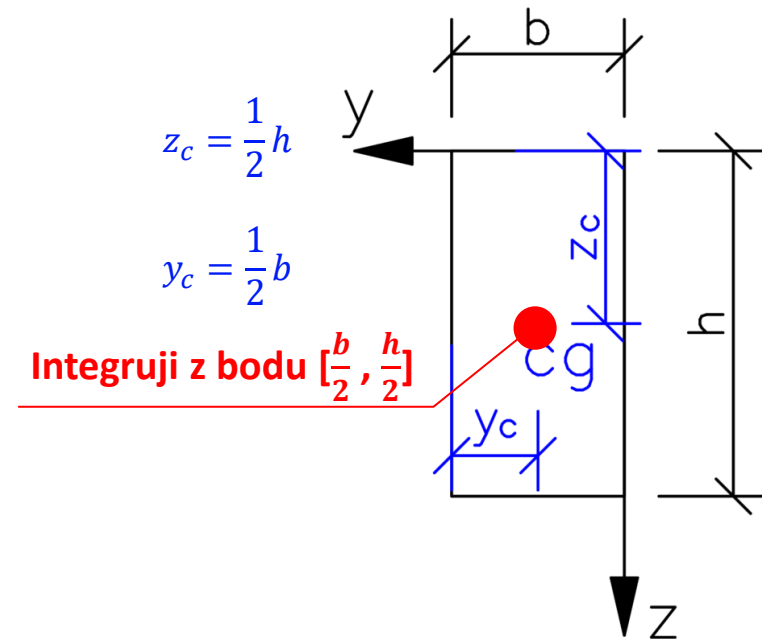
PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI

Integrace obrazce k těžišti - obdélník

$$I_{y,cg} = \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} z^2 dy dz = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 b dz = b \left[\frac{1}{3} z^3 \right]_{-h/2}^{h/2} = \frac{1}{12} b h^3$$

$$I_{z,cg} = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dz dy = \int_{-b/2}^{b/2} y^2 h dy = h \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_{-h/2}^{b/2} = \frac{1}{12} b^3 h$$

$$D_{yz,cg}$$



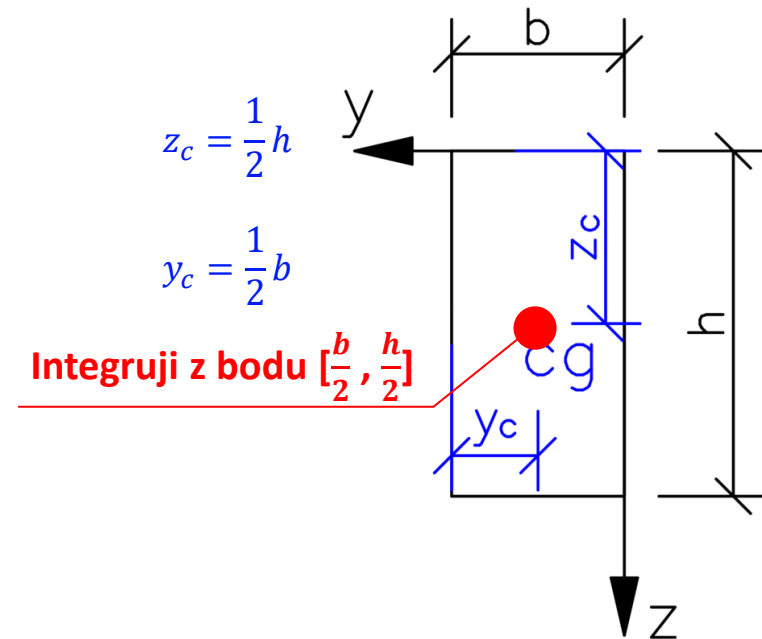
PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI

Integrace obrazce k těžišti - obdélník

$$I_{y,cg} = \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} z^2 dy dz = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 b dz = b \left[\frac{1}{3} z^3 \right]_{-h/2}^{h/2} = \frac{1}{12} b h^3$$

$$I_{z,cg} = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dz dy = \int_{-b/2}^{b/2} y^2 h dy = h \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_{-b/2}^{b/2} = \frac{1}{12} h b^3$$

$$D_{yz,cg} = \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} yz dy dz = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{z}{2} [y^2]_{-b/2}^{b/2} dz = \int_{-h/2}^{h/2} z \cdot 0 dz = 0$$



PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI

Integrace obrazce k počátku - obdélník

$$I_y$$

$$I_z$$

$$D_{yz}$$

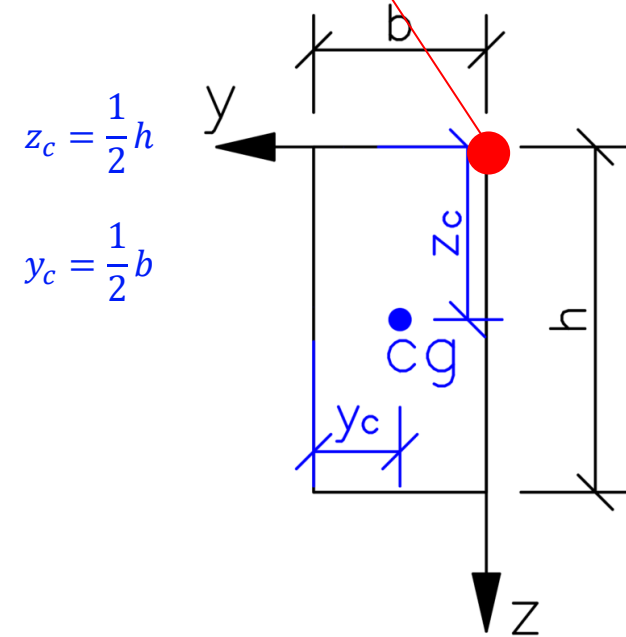
Steinerův doplněk - obdélník

$$I_y$$

$$I_z$$

$$D_{yz}$$

Integruji z bodu [0, 0]



PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI

Integrace obrazce k počátku - obdélník

$$I_y = \int_0^h \int_0^b z^2 dy dz = \int_0^h z^2 b dz = b \left[\frac{1}{3} z^3 \right]_0^h = \frac{1}{3} b h^3$$

$$I_z$$

$$D_{yz}$$

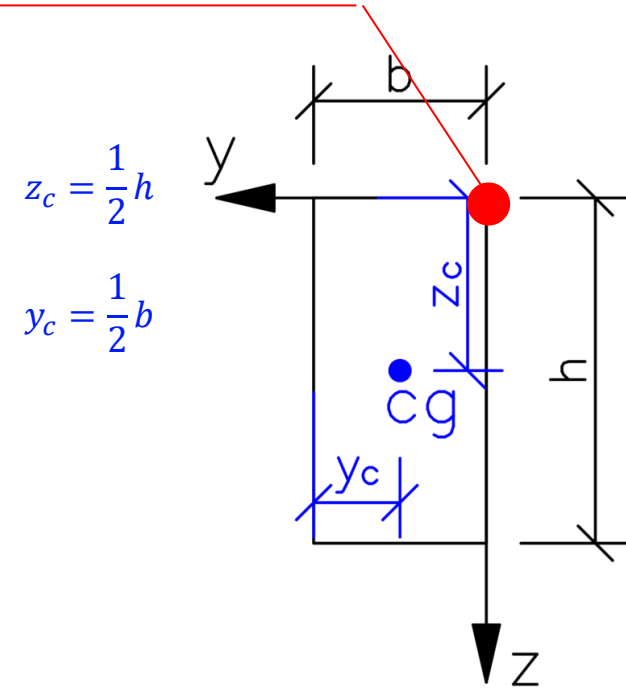
Steinerův doplněk - obdélník

$$I_y$$

$$I_z$$

$$D_{yz}$$

Integruji z bodu [0, 0]



PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI

Integrace obrazce k počátku - obdélník

$$I_y = \int_0^h \int_0^b z^2 dy dz = \int_0^h z^2 b dz = b \left[\frac{1}{3} z^3 \right]_0^h = \frac{1}{3} b h^3$$

$$I_z = \int_0^h \int_0^b y^2 dy dz = \int_0^h y^2 h dz = h \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_0^b = \frac{1}{3} h b^3$$

$$D_{yz} = \int_0^h \int_0^b yz dy dz = \int_0^h \frac{z}{2} b^2 dz = \frac{1}{4} b^2 h^2$$

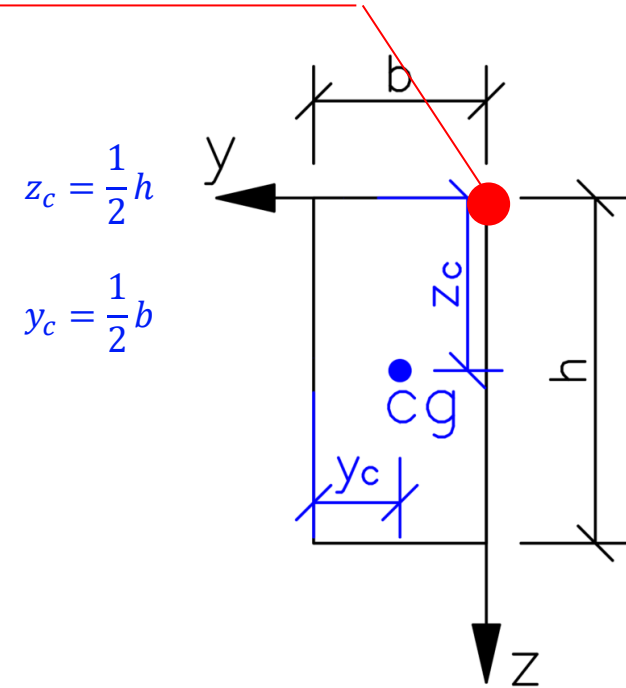
Steinerův doplněk - obdélník

$$I_y$$

$$I_z$$

$$D_{yz}$$

Integruji z bodu [0, 0]



PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI

Integrace obrazce k počátku - obdélník

$$I_y = \int_0^h \int_0^b z^2 dy dz = \int_0^h z^2 b dz = b \left[\frac{1}{3} z^3 \right]_0^h = \frac{1}{3} b h^3$$

$$I_z = \int_0^h \int_0^b y^2 dy dz = \int_0^h y^2 h dz = h \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_0^b = \frac{1}{3} b^3 h$$

$$D_{yz} = \int_0^h \int_0^b yz dy dz = \int_0^h \frac{z}{2} b^2 dz = \frac{1}{4} b^2 h^2$$

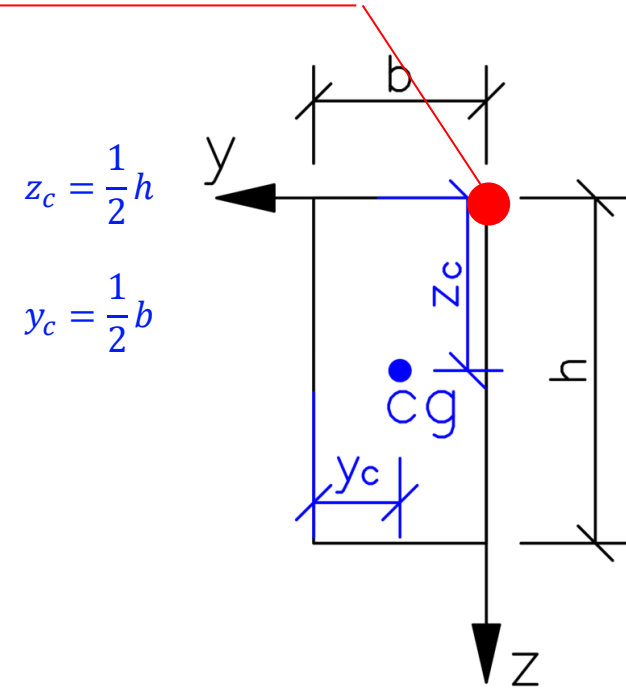
Steinerův doplněk - obdélník

$$I_y = I_{y, cg} + A z_c^2 = \frac{1}{12} b h^3 + b h \left(\frac{h}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} b h^3$$

I_z

D_{yz}

Integruji z bodu [0, 0]



PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI

Integrace obrazce k počátku - obdélník

$$I_y = \int_0^h \int_0^b z^2 dy dz = \int_0^h z^2 b dz = b \left[\frac{1}{3} z^3 \right]_0^h = \frac{1}{3} b h^3$$

$$I_z = \int_0^h \int_0^b y^2 dy dz = \int_0^h y^2 h dz = h \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_0^b = \frac{1}{3} b^3 h$$

$$D_{yz} = \int_0^h \int_0^b yz dy dz = \int_0^h \frac{z}{2} b^2 dz = \frac{1}{4} b^2 h^2$$

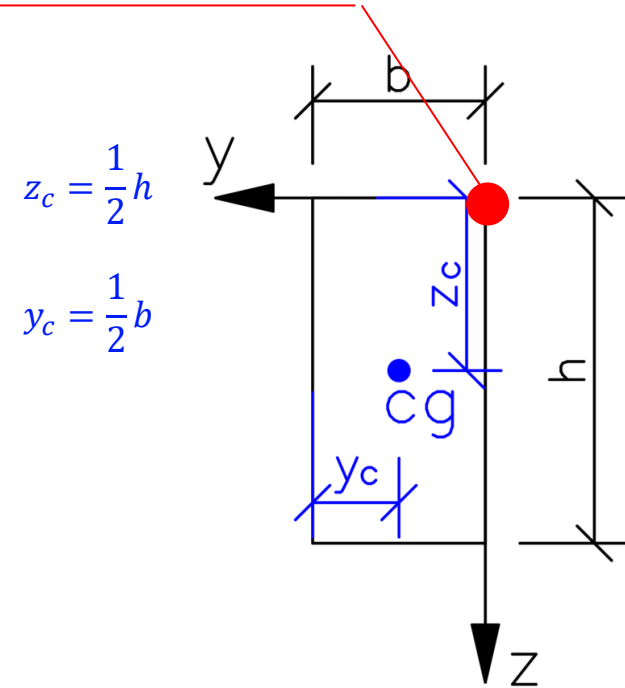
Steinerův doplněk - obdélník

$$I_y = I_{y, cg} + A z_c^2 = \frac{1}{12} b h^3 + b h \left(\frac{h}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} b h^3$$

$$I_z = I_{z, cg} + A y_c^2 = \frac{1}{12} b^3 h + b h \left(\frac{b}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} b^3 h$$

$$D_{yz} = D_{yz, cg} + A y_c z_c = 0 + b h \frac{b}{2} \frac{h}{2} = \frac{1}{4} b^2 h^2$$

Integruji z bodu [0, 0]



PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI

Integrace obrazce k počátku - obdélník

$$I_y = \int_0^h \int_0^b z^2 dy dz = \int_0^h z^2 b dz = b \left[\frac{1}{3} z^3 \right]_0^h = \frac{1}{3} b h^3$$

$$I_z = \int_0^h \int_0^b y^2 dy dz = \int_0^h y^2 h dz = h \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_0^b = \frac{1}{3} b^3 h$$

$$D_{yz} = \int_0^h \int_0^b yz dy dz = \int_0^h \frac{z}{2} b^2 dz = \frac{1}{4} b^2 h^2$$

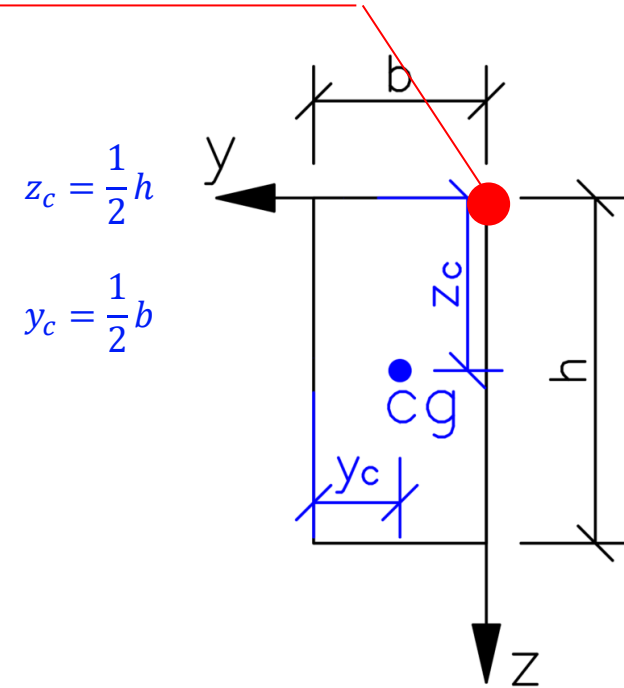
Steinerův doplněk - obdélník

$$I_y = I_{y,cg} + A z_c^2 = \frac{1}{12} b h^3 + b h \left(\frac{h}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} b h^3$$

$$I_z = I_{z,cg} + A y_c^2 = \frac{1}{12} b^3 h + b h \left(\frac{b}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} b^3 h$$

$$D_{yz} = D_{yz,cg} + A y_c z_c = 0 + b h \frac{b}{2} \frac{h}{2} = \frac{1}{4} b^2 h^2$$

Integruji z bodu [0, 0]



Minimální hodnota momentu setrvačnosti je vždy vztažena k těžišti obrazce.



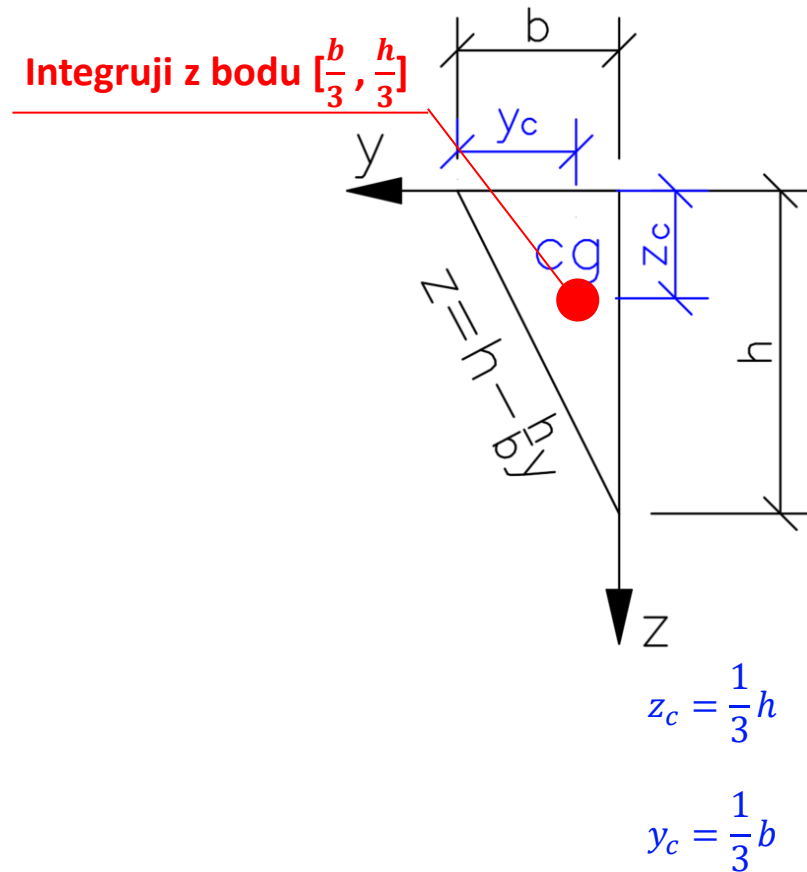
PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI

Integrace obrazce k těžišti – trojúhelník 1/4

$$I_{y,cg}$$

$$I_{z,cg}$$

$$D_{yz,cg}$$



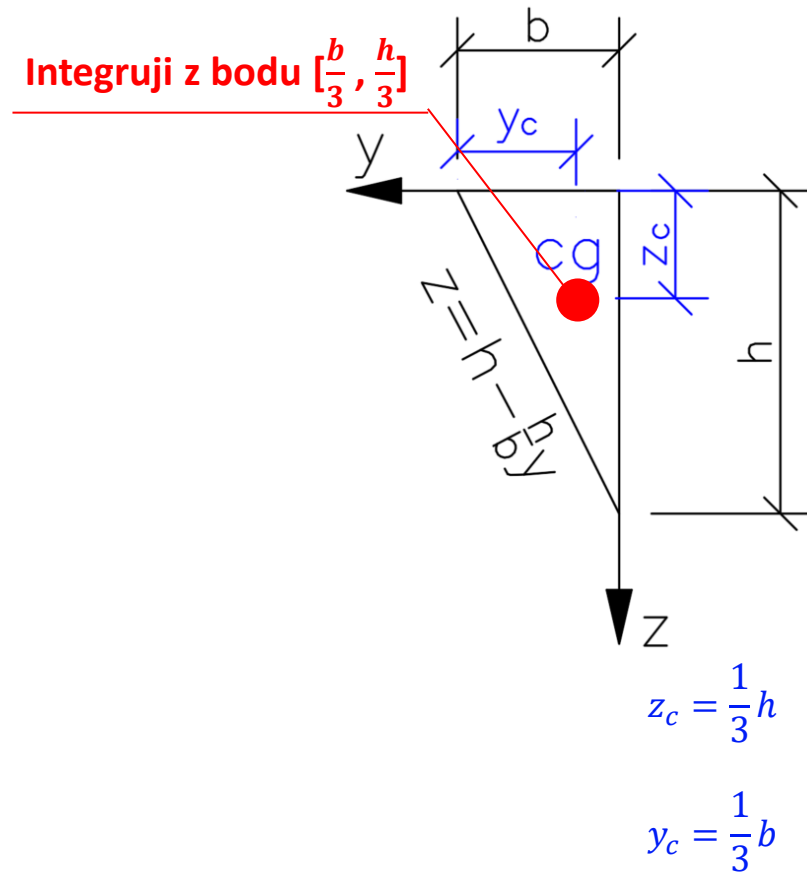
PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI

Integrace obrazce k těžišti – trojúhelník 1/4

$$I_{y,cg} = \int_{-h/3}^{2h/3} \int_{-b/3}^{\left(\frac{1}{3}b - \frac{zb}{h}\right)} z^2 dy dz$$

$$I_{z,cg}$$

$$D_{yz,cg}$$



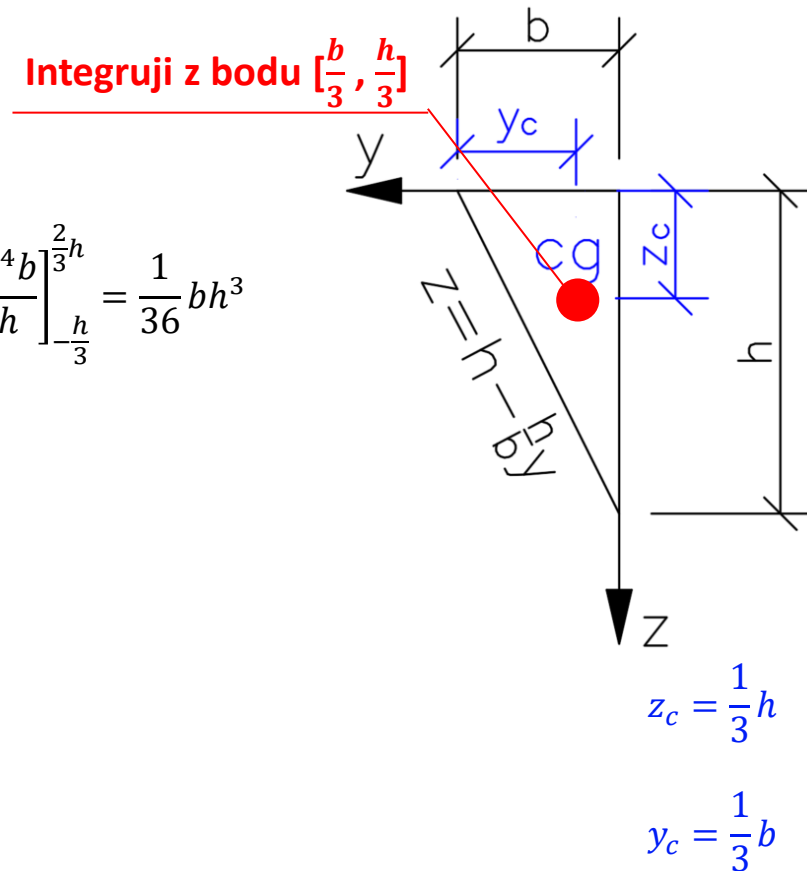
PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI

Integrace obrazce k těžišti – trojúhelník 1/4

$$I_{y,cg} = \int_{-h/3}^{2h/3} \int_{-b/3}^{\left(\frac{1}{3}b - \frac{z}{h}b\right)} z^2 dy dz = \int_{-h/3}^{2h/3} \frac{2z^2}{3} b - \frac{z^3}{h} dz = \left[\frac{2}{9} z^3 b - \frac{1}{4} \frac{z^4}{h} \right]_{-h/3}^{2h/3} = \frac{1}{36} b h^3$$

$I_{z,cg}$

$D_{yz,cg}$



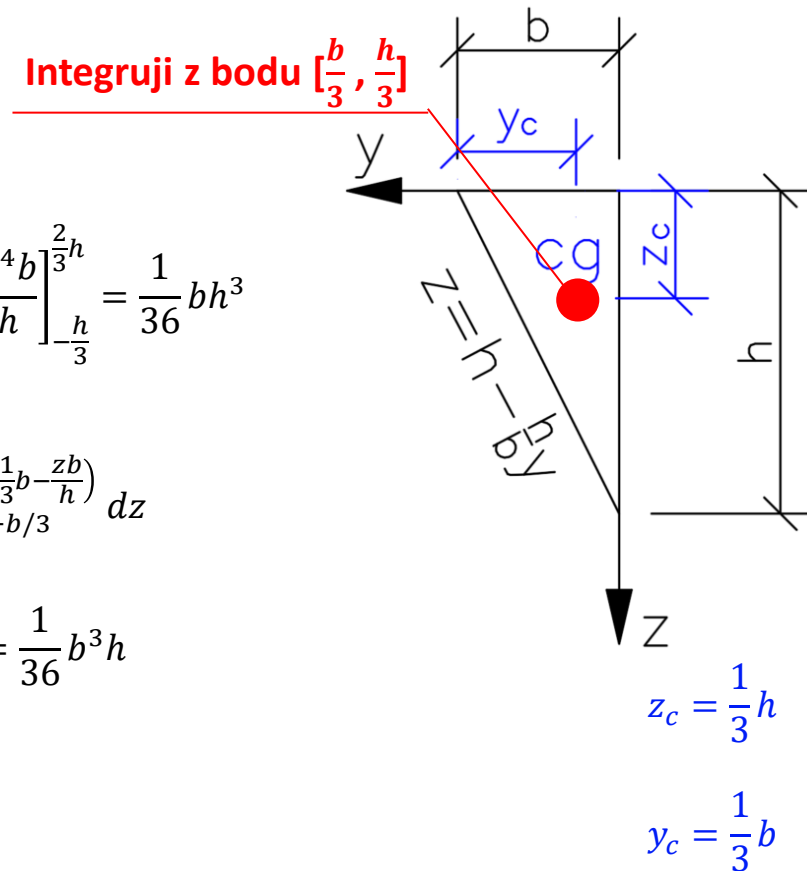
PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI

Integrace obrazce k těžišti – trojúhelník 1/4

$$I_{y,cg} = \int_{-h/3}^{2h/3} \int_{-b/3}^{(\frac{1}{3}b - \frac{zb}{h})} z^2 dy dz = \int_{-h/3}^{2h/3} \frac{2z^2}{3} b - \frac{z^3 b}{h} dz = \left[\frac{2}{9} z^3 b - \frac{1}{4} \frac{z^4 b}{h} \right]_{-h/3}^{2h/3} = \frac{1}{36} b h^3$$

$$\begin{aligned} I_{z,cg} &= \int_{-h/3}^{2h/3} \int_{-b/3}^{(\frac{1}{3}b - \frac{zb}{h})} y^2 dy dz = \frac{1}{3} \int_{-h/3}^{2h/3} [y^3]_{-b/3}^{(\frac{1}{3}b - \frac{zb}{h})} dz = \frac{1}{3} \int_{-h/3}^{2h/3} [y^3]_{-b/3}^{(\frac{1}{3}b - \frac{zb}{h})} dz \\ &= \frac{1}{3} \int_{-h/3}^{2h/3} \frac{2b^3}{27} - \frac{1}{3} \frac{b^3 z}{h} + \frac{b^3 z}{h} - \frac{z^3 b^3}{h^3} dz = \frac{1}{3} \left(\frac{8}{324} + \frac{19}{324} \right) b^3 h = \frac{1}{36} b^3 h \end{aligned}$$

$$D_{yz,cg}$$



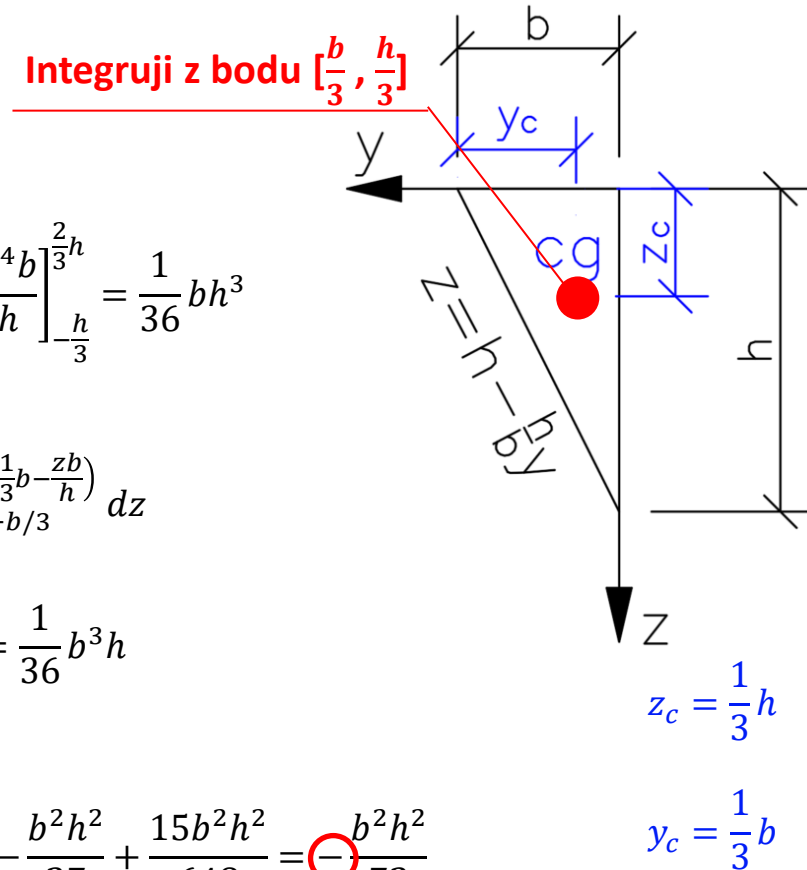
PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI

Integrace obrazce k těžišti – trojúhelník 1/4

$$I_{y,cg} = \int_{-h/3}^{2h/3} \int_{-b/3}^{\left(\frac{1}{3}b - \frac{zb}{h}\right)} z^2 dy dz = \int_{-h/3}^{2h/3} \frac{2z^2}{3} b - \frac{z^3 b}{h} dz = \left[\frac{2}{9} z^3 b - \frac{1}{4} \frac{z^4 b}{h} \right]_{-h/3}^{2h/3} = \frac{1}{36} b h^3$$

$$\begin{aligned} I_{z,cg} &= \int_{-h/3}^{2h/3} \int_{-b/3}^{\left(\frac{1}{3}b - \frac{zb}{h}\right)} y^2 dy dz = \frac{1}{3} \int_{-h/3}^{2h/3} [y^3]_{-b/3}^{\left(\frac{1}{3}b - \frac{zb}{h}\right)} dz = \frac{1}{3} \int_{-h/3}^{2h/3} [y^3]_{-b/3}^{\left(\frac{1}{3}b - \frac{zb}{h}\right)} dz \\ &= \frac{1}{3} \int_{-h/3}^{2h/3} \frac{2b^3}{27} - \frac{1}{3} \frac{b^3 z}{h} + \frac{b^3 z}{h} - \frac{z^3 b^3}{h^3} dz = \frac{1}{3} \left(\frac{8}{324} + \frac{19}{324} \right) b^3 h = \frac{1}{36} b^3 h \end{aligned}$$

$$D_{yz,cg} = \int_{-h/3}^{2h/3} \int_{-b/3}^{\left(\frac{1}{3}b - \frac{zb}{h}\right)} yz dy dz = \frac{1}{2} \int_{-h/3}^{2h/3} z \left(-\frac{2}{3} \frac{b^2 z^2}{h} + \frac{b^2 z^3}{h^2} \right) dz = -\frac{b^2 h^2}{27} + \frac{15 b^2 h^2}{648} = -\frac{b^2 h^2}{72}$$



PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI

Integrace obrazce k počátku – trojúhelník 1/4

$$I_y$$

$$I_z$$

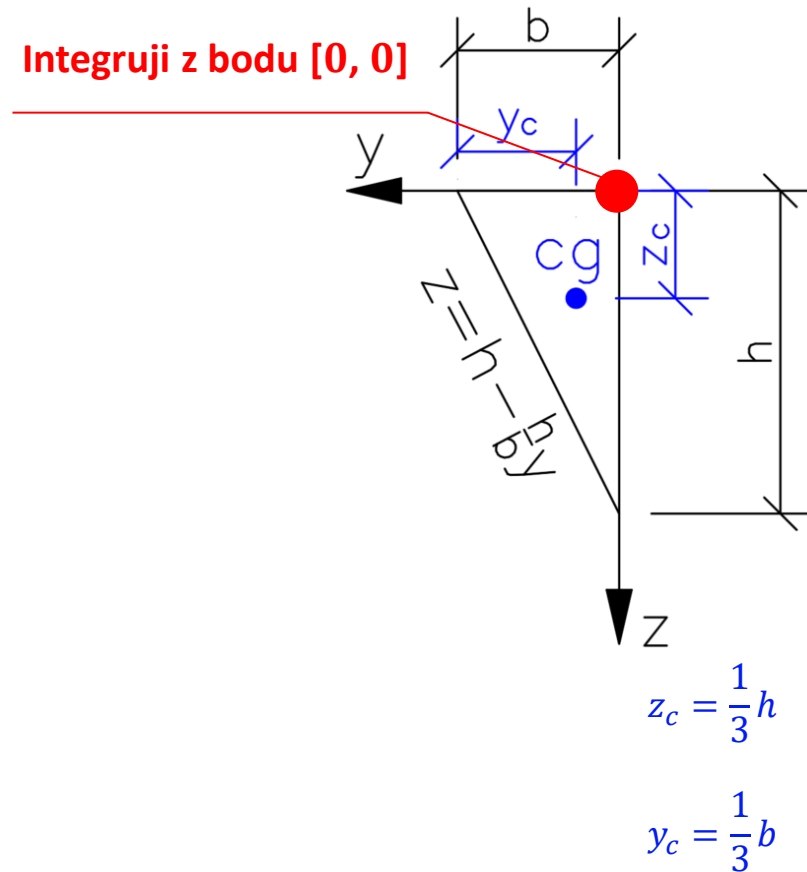
$$D_{yz}$$

Steinerův doplněk – trojúhelník (alternativní výpočet)

$$I_y$$

$$I_y$$

$$D_{y,z}$$

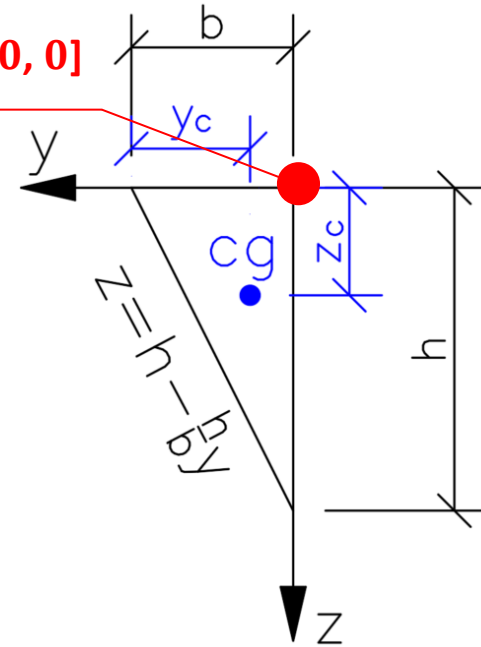


PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI

Integrace obrazce k počátku – trojúhelník 1/4

$$I_y = \int_0^h \int_0^{b-\frac{zb}{h}} z^2 dy dz = \int_0^h z^2 b - \frac{z^3 b}{h} dz = \left[\frac{1}{3} z^3 b - \frac{1}{4} \frac{z^4 b}{h} \right]_0^h = \frac{1}{12} b h^3$$

Integruji z bodu [0, 0]



$$z_c = \frac{1}{3} h$$

$$y_c = \frac{1}{3} b$$

Steinerův doplněk – trojúhelník (alternativní výpočet)

$$I_y$$

$$I_y$$

$$D_{y,z}$$

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI

Integrace obrazce k počátku – trojúhelník 1/4

$$I_y = \int_0^h \int_0^{b-\frac{zb}{h}} z^2 dy dz = \int_0^h z^2 b - \frac{z^3 b}{h} dz = \left[\frac{1}{3} z^3 b - \frac{1}{4} \frac{z^4 b}{h} \right]_0^h = \frac{1}{12} b h^3$$

$$I_z = \int_0^h \int_0^{b-\frac{zb}{h}} y^2 dy dz = \int_0^h \left(b - \frac{zb}{h} \right)^3 dz = \frac{1}{3} \left(2b^3 h - \frac{3}{2} b^3 h - \frac{1}{4} b^3 h \right) = \frac{1}{12} b^3 h$$

$$D_{yz}$$

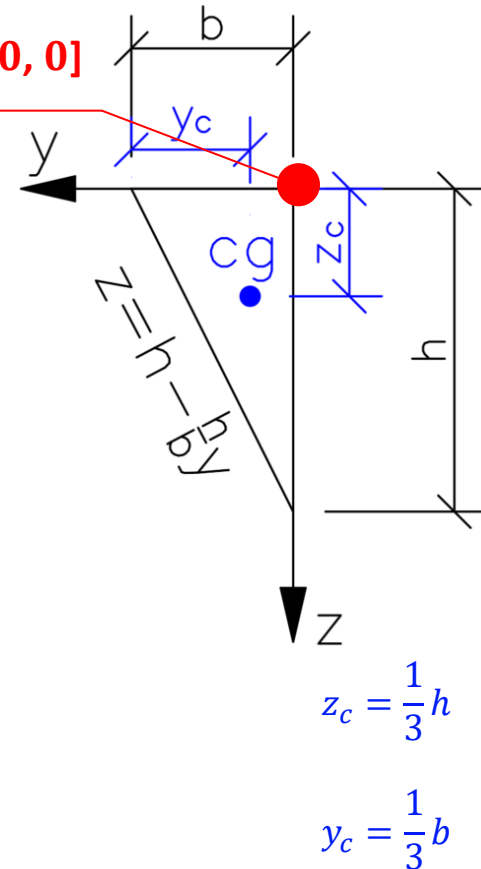
Steinerův doplněk – trojúhelník (alternativní výpočet)

$$I_y$$

$$I_y$$

$$D_{y,z}$$

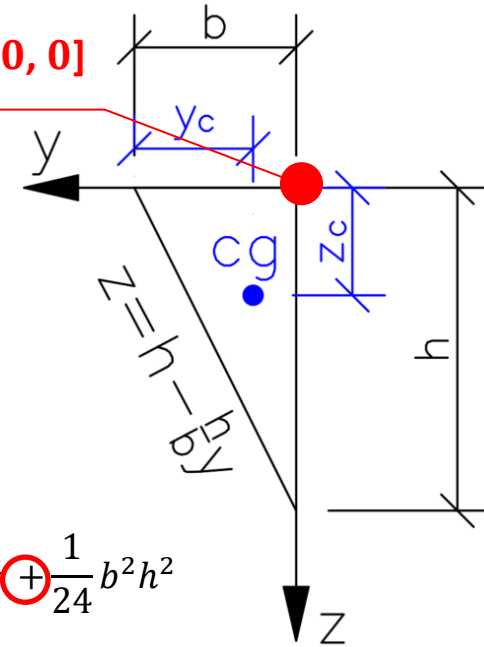
Integruji z bodu [0, 0]



PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI

Integrace obrazce k počátku – trojúhelník 1/4

Integruji z bodu [0, 0]



$$I_y = \int_0^h \int_0^{(b-\frac{zb}{h})} z^2 dy dz = \int_0^h z^2 b - \frac{z^3 b}{h} dz = \left[\frac{1}{3} z^3 b - \frac{1}{4} \frac{z^4 b}{h} \right]_0^h = \frac{1}{12} b h^3$$

$$I_z = \int_0^h \int_0^{(b-\frac{zb}{h})} y^2 dy dz = \int_0^h \left(b - \frac{zb}{h} \right)^3 dz = \frac{1}{3} \left(2b^3 h - \frac{3}{2} b^3 h - \frac{1}{4} b^3 h \right) = \frac{1}{12} b^3 h$$

$$D_{yz} = \int_0^h \int_0^{(b-\frac{zb}{h})} yz dy dz = \frac{1}{2} \int_0^h z \left(b^2 - 2 \frac{zb^2}{h} + \frac{z^2 b^2}{h^2} \right) dz = \frac{1}{4} b^2 h^2 - \frac{1}{3} b^2 h^2 + \frac{1}{8} b^2 h^2 = + \frac{1}{24} b^2 h^2$$

Steinerův doplněk – trojúhelník (alternativní výpočet)

$$z_c = \frac{1}{3} h$$

$$y_c = \frac{1}{3} b$$

I_y

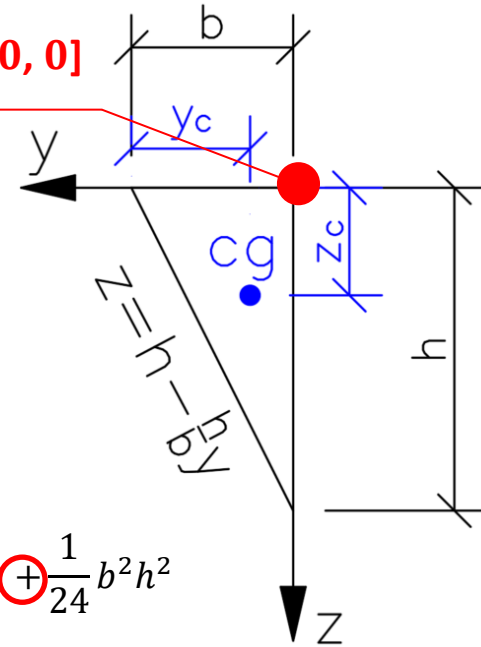
I_y

$D_{y,z}$

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI

Integrace obrazce k počátku – trojúhelník 1/4

Integruji z bodu [0, 0]



$$I_y = \int_0^h \int_0^{b-\frac{zb}{h}} z^2 dy dz = \int_0^h z^2 b - \frac{z^3 b}{h} dz = \left[\frac{1}{3} z^3 b - \frac{1}{4} \frac{z^4 b}{h} \right]_0^h = \frac{1}{12} b h^3$$

$$I_z = \int_0^h \int_0^{b-\frac{zb}{h}} y^2 dy dz = \int_0^h \left(b - \frac{zb}{h} \right)^3 dz = \frac{1}{3} \left(2b^3 h - \frac{3}{2} b^3 h - \frac{1}{4} b^3 h \right) = \frac{1}{12} b^3 h$$

$$D_{yz} = \int_0^h \int_0^{b-\frac{zb}{h}} yz dy dz = \frac{1}{2} \int_0^h z \left(b^2 - 2 \frac{zb^2}{h} + \frac{z^2 b^2}{h^2} \right) dz = \frac{1}{4} b^2 h^2 - \frac{1}{3} b^2 h^2 + \frac{1}{8} b^2 h^2 = + \frac{1}{24} b^2 h^2$$

Steinerův doplněk – trojúhelník (alternativní výpočet)

$$z_c = \frac{1}{3} h$$

$$y_c = \frac{1}{3} b$$

$$I_y = I_{y,cg} + A z^2 = \frac{1}{36} b h^3 + \frac{1}{2} b h \left(\frac{1}{3} h \right)^2 = \frac{1}{12} b h^3$$

$$I_z = I_{z,cg} + A y^2 = \frac{1}{36} b^3 h + \frac{1}{2} b h \left(\frac{1}{3} b \right)^2 = \frac{1}{12} b^3 h$$

$$D_{y,z} = D_{yz,cg} + A y z = -\frac{b^2 h^2}{72} + \frac{1}{2} b h \frac{1}{3} b \frac{1}{3} h = \frac{1}{24} b^2 h^2$$

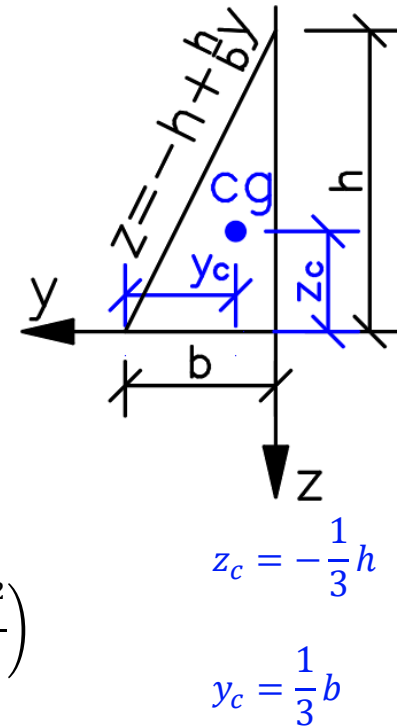
PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI

Integrace obrazce k počátku – trojúhelník 2/4

$$I_y = \int_{-h}^0 \int_0^{b+\frac{zb}{h}} z^2 dy dz = \int_{-h}^0 z^2 b + \frac{z^3 b}{h} dz = \left[\frac{1}{3} z^3 b + \frac{1}{4} \frac{z^4 b}{h} \right]_{-h}^0 = \frac{1}{12} b h^3$$

$$I_z = \int_{-h}^0 \int_0^{b+\frac{zb}{h}} y^2 dy dz = \int_{-h}^0 \left(b + \frac{zb}{h} \right)^3 dz = \frac{1}{3} \left(2b^3 h - \frac{3}{2} b^3 h - \frac{1}{4} b^3 h \right) = \frac{1}{12} b^3 h$$

$$\begin{aligned} D_{yz} &= \int_{-h}^0 \int_0^{b+\frac{zb}{h}} yz dy dz = \frac{1}{2} \int_{-h}^0 z \left(b^2 + 2 \frac{zb^2}{h} + \frac{z^2 b^2}{h^2} \right) dz = \frac{1}{2} \left(zb^2 + 2 \frac{z^2 b^2}{h} + \frac{z^3 b^2}{h^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} z^2 b^2 + \frac{2}{3} \frac{z^3 b^2}{h} + \frac{1}{4} \frac{z^4 b^2}{h^2} \right) = \left(\frac{1}{4} z^2 b^2 + \frac{1}{3} \frac{z^3 b^2}{h} + \frac{1}{8} \frac{z^4 b^2}{h^2} \right) = - \left(\frac{1}{4} h^2 b^2 - \frac{1}{3} h^2 b^2 + \frac{1}{8} \frac{z^4 b^2}{h^2} \right) \\ &= - \frac{6 - 8 + 3}{24} h^2 b^2 = - \frac{1}{24} h^2 b^2 \end{aligned}$$



Steinerův doplněk těžišti – trojúhelník (deviační moment k těžišti)

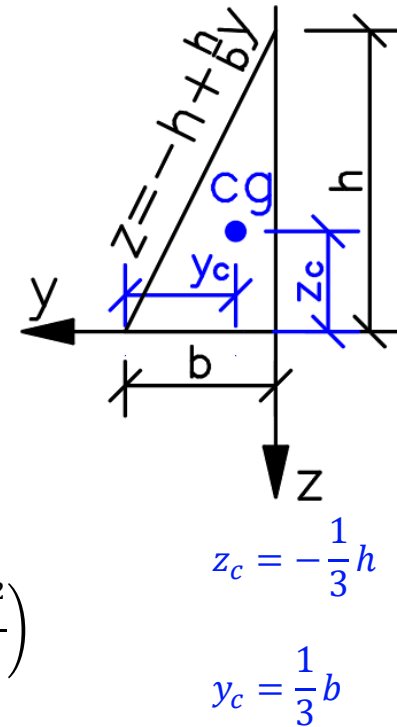
PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI

Integrace obrazce k počátku – trojúhelník 2/4

$$I_y = \int_{-h}^0 \int_0^{b+\frac{zb}{h}} z^2 dy dz = \int_{-h}^0 z^2 b + \frac{z^3 b}{h} dz = \left[\frac{1}{3} z^3 b + \frac{1}{4} \frac{z^4 b}{h} \right]_{-h}^0 = \frac{1}{12} b h^3$$

$$I_z = \int_{-h}^0 \int_0^{b+\frac{zb}{h}} y^2 dy dz = \int_{-h}^0 \left(b + \frac{zb}{h} \right)^3 dz = \frac{1}{3} \left(2b^3 h - \frac{3}{2} b^3 h - \frac{1}{4} b^3 h \right) = \frac{1}{12} b^3 h$$

$$\begin{aligned} D_{yz} &= \int_{-h}^0 \int_0^{b+\frac{zb}{h}} yz dy dz = \frac{1}{2} \int_{-h}^0 z \left(b^2 + 2 \frac{zb^2}{h} + \frac{z^2 b^2}{h^2} \right) dz = \frac{1}{2} \left(zb^2 + 2 \frac{z^2 b^2}{h} + \frac{z^3 b^2}{h^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} z^2 b^2 + \frac{2}{3} \frac{z^3 b^2}{h} + \frac{1}{4} \frac{z^4 b^2}{h^2} \right) = \left(\frac{1}{4} z^2 b^2 + \frac{1}{3} \frac{z^3 b^2}{h} + \frac{1}{8} \frac{z^4 b^2}{h^2} \right) = - \left(\frac{1}{4} h^2 b^2 - \frac{1}{3} h^2 b^2 + \frac{1}{8} \frac{z^4 b^2}{h^2} \right) \\ &= - \frac{6 - 8 + 3}{24} h^2 b^2 = - \frac{1}{24} h^2 b^2 \end{aligned}$$



Steinerův doplněk těžišti – trojúhelník (deviační moment k těžišti)

$$D_{yz,cg} = D_{y,z} - A y z = - \frac{1}{24} h^2 b^2 + \frac{1}{2} b h \frac{1}{3} b \frac{1}{3} h = - \frac{1}{24} h^2 b^2 + \frac{1}{18} h^2 b^2 = \frac{-3 + 4}{72} h^2 b^2 = \textcircled{+} \frac{1}{72} h^2 b^2$$

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI

Integrace obrazce k počátku – trojúhelník 3/4

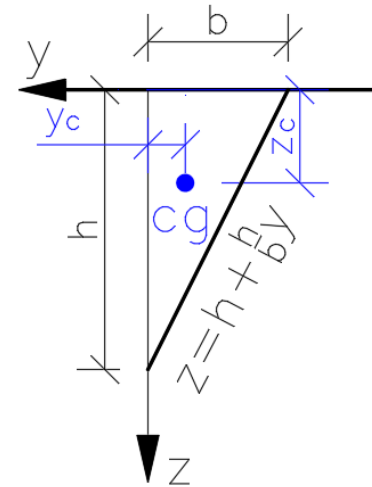
$$I_y = \int_0^h \int_{(-b+\frac{zb}{h})}^0 z^2 dy dz = \int_0^h z^2 b - \frac{z^3 b}{h} dz = \left[\frac{1}{3} z^3 b - \frac{1}{4} \frac{z^4 b}{h} \right]_0^h = \frac{1}{12} b h^3$$

$$I_z = \int_0^h \int_{(-b+\frac{zb}{h})}^0 y^2 dy dz = \int_0^h \left(b - \frac{zb}{h} \right)^3 dz = \frac{1}{3} \left(2b^3 h - \frac{3}{2} b^3 h - \frac{1}{4} b^3 h \right) = \frac{1}{12} b^3 h$$

$$\begin{aligned} D_{yz} &= \int_0^h \int_{(-b+\frac{zb}{h})}^0 yz dy dz = \frac{1}{2} \int_0^h -z \left(b^2 - 2 \frac{zb^2}{h} + \frac{z^2 b^2}{h^2} \right) dz = -\frac{1}{2} \left(zb^2 - 2 \frac{z^2 b^2}{h} + \frac{z^3 b^2}{h^2} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} z^2 b^2 - \frac{2}{3} \frac{z^3 b^2}{h} + \frac{1}{4} \frac{z^4 b^2}{h^2} \right) = -\left(\frac{1}{4} z^2 b^2 - \frac{1}{3} \frac{z^3 b^2}{h} + \frac{1}{8} \frac{z^4 b^2}{h^2} \right) = -\left(\frac{1}{4} h^2 b^2 - \frac{1}{3} h^2 b^2 + \frac{1}{8} \frac{z^4 b^2}{h^2} \right) \\ &= -\frac{6-8+3}{24} h^2 b^2 = -\frac{1}{24} h^2 b^2 \end{aligned}$$

Steinerův doplněk těžišti – trojúhelník (deviační moment k těžišti)

$$D_{yz,cg} = D_{y,z} - Ayz = -\frac{1}{24} h^2 b^2 + \frac{1}{2} b h \frac{1}{3} b \frac{1}{3} h = -\frac{1}{24} h^2 b^2 + \frac{1}{18} h^2 b^2 = \frac{-3+4}{72} h^2 b^2 = +\frac{1}{72} h^2 b^2$$



$$z_c = \frac{1}{3} h$$

$$y_c = -\frac{1}{3} b$$

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI

Integrace obrazce k počátku – trojúhelník 4/4

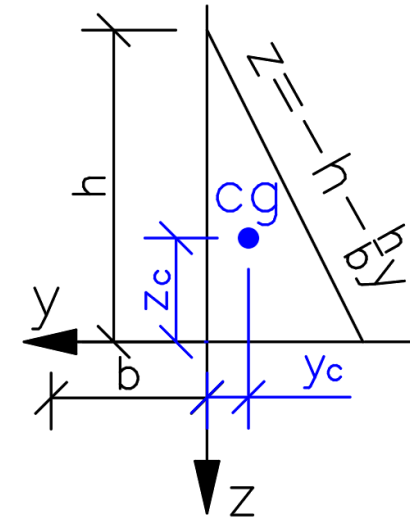
$$I_y = \int_{-h}^0 \int_{(-b+\frac{zb}{h})}^0 z^2 dy dz = \int_{-h}^0 z^2 b - \frac{z^3 b}{h} dz = \left[\frac{1}{3} z^3 b - \frac{1}{4} \frac{z^4 b}{h} \right]_{-h}^0 = \frac{1}{12} b h^3$$

$$I_z = \int_{-h}^0 \int_{(-b+\frac{zb}{h})}^0 y^2 dy dz = \int_{-h}^0 \left(b - \frac{zb}{h} \right)^3 dz = \frac{1}{3} \left(2b^3 h - \frac{3}{2} b^3 h - \frac{1}{4} b^3 h \right) = \frac{1}{12} b^3 h$$

$$\begin{aligned} D_{yz} &= \int_{-h}^0 \int_{(-b+\frac{zb}{h})}^0 yz dy dz = \frac{1}{2} \int_{-h}^0 -z \left(b^2 - 2 \frac{zb^2}{h} + \frac{z^2 b^2}{h^2} \right) dz = -\frac{1}{2} \left(zb^2 - 2 \frac{z^2 b^2}{h} + \frac{z^3 b^2}{h^2} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} z^2 b^2 - \frac{2}{3} \frac{z^3 b^2}{h} + \frac{1}{4} \frac{z^4 b^2}{h^2} \right) = -\left(\frac{1}{4} z^2 b^2 - \frac{1}{3} \frac{z^3 b^2}{h} + \frac{1}{8} \frac{z^4 b^2}{h^2} \right) = \left(\frac{1}{4} h^2 b^2 - \frac{1}{3} h^2 b^2 + \frac{1}{8} \frac{z^4 b^2}{h^2} \right) \\ &= \frac{6-8+3}{24} h^2 b^2 = \frac{1}{24} h^2 b^2 \end{aligned}$$

Steinerův doplněk těžišti – trojúhelník (deviační moment k těžišti)

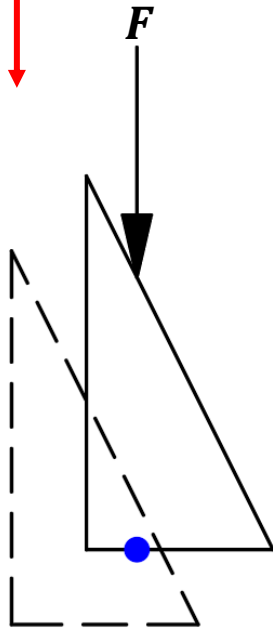
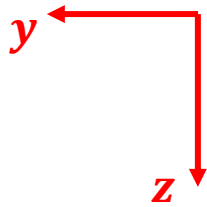
$$D_{yz,cg} = D_{y,z} - A y_z = -\frac{1}{24} h^2 b^2 - \frac{1}{2} b h \frac{1}{3} b \frac{1}{3} h = -\frac{1}{24} h^2 b^2 + \frac{1}{18} h^2 b^2 = \frac{-3+4}{72} h^2 b^2 = -\frac{1}{72} h^2 b^2$$



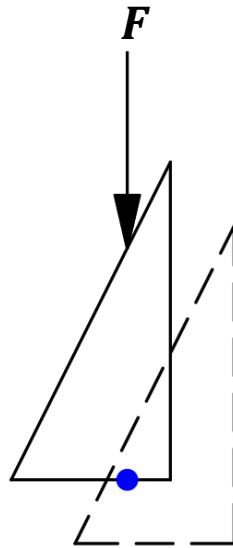
$$z_c = -\frac{1}{3} h$$

$$y_c = -\frac{1}{3} b$$

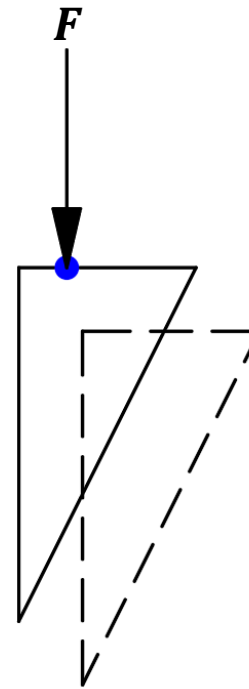
PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI



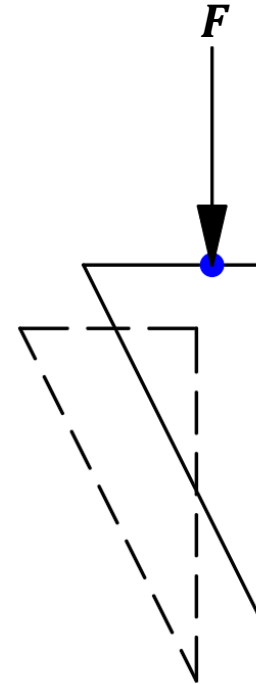
$$D_{yz, cg} < 0$$



$$D_{yz, cg} > 0$$

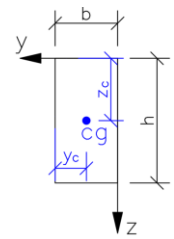
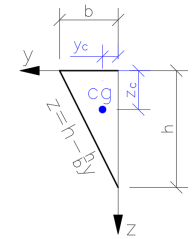
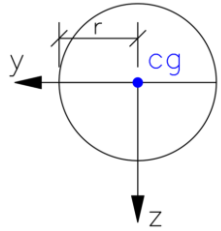
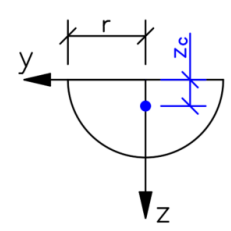


$$D_{yz, cg} > 0$$

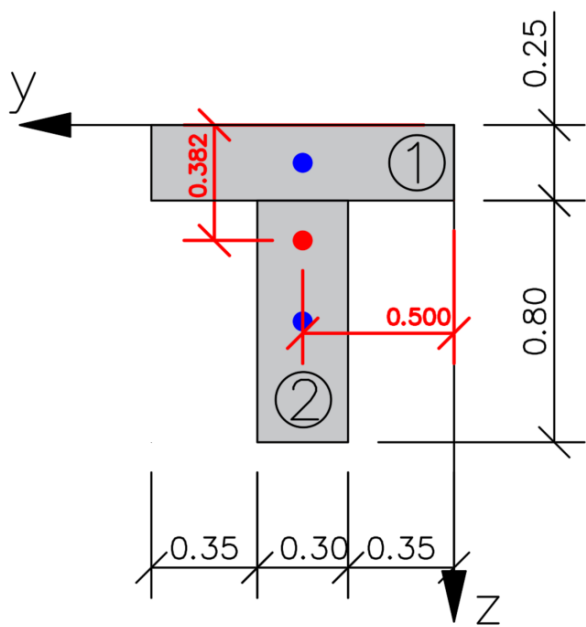


$$D_{yz, cg} < 0$$

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI

	Souřadnice těžiště	Plocha obrazce A	Momenty setrvačnosti k těžišti obrazce I_y, I_z	Deviační momenty k těžišti obrazce D_{yz}
	$y_c = \frac{1}{2}h$ $z_c = \frac{1}{2}b$	$A = bh$	$I_y = \frac{1}{12}bh^3$ $I_z = \frac{1}{12}b^3h$	$D_{y,z} = 0$
	$y_c = \frac{1}{3}h$ $z_c = \frac{1}{3}b$	$A = \frac{1}{2}bh$	$I_y = \frac{1}{36}bh^3$ $I_z = \frac{1}{36}b^3h$	$y_c \cdot z_c > 0: s = -1$ $y_c \cdot z_c < 0: s = 1$ $D_{y,z} = s \frac{1}{72}b^2h^2$
	$y_c = 0$ $z_c = 0$	$A = \pi r^2$	$I_y = \pi r^4$ $I_z = \pi r^4$	$D_{y,z} = 0$
	$y_c = 0$ $z_c = \frac{4r}{3\pi}$	$A = \frac{1}{2}\pi r^2$	$I_y = \frac{1}{8}\pi r^4$ $I_z = \frac{1}{8}\pi r^4$	$D_{y,z} = 0$

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI



	1	2
I_{y0} [m ⁴]		
I_{z0} [m ⁴]		
y_i [m]	0.00E+00	0.00E+00
z_i [m]	-2.57E-01	2.68E-01
I_{yi} [m ⁴]		
I_{zi} [m ⁴]		
D_{yz0} [m ⁴]		
D_{yzi} [m ⁴]		

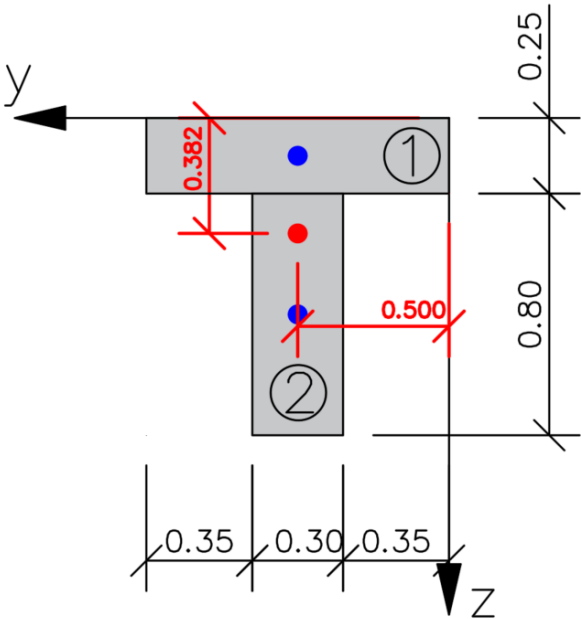
I_y [m ⁴]	
I_z [m ⁴]	
D_{yz} [m ⁴]	

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI

$$I_y = \frac{1}{12}bh^3 + bhz^2$$

$$I_z = \frac{1}{12}b^3h + bhy^2$$

$$D_{yz} = 0 + bhzy$$



	1	2
I_{y0} [m ⁴]		
I_{z0} [m ⁴]		
y_i [m]	0.00E+00	0.00E+00
z_i [m]	-2.57E-01	2.68E-01
I_{yi} [m ⁴]		
I_{zi} [m ⁴]		
D_{yz0} [m ⁴]		
D_{yzi} [m ⁴]		

I_y [m ⁴]	
I_z [m ⁴]	
D_{yz} [m ⁴]	

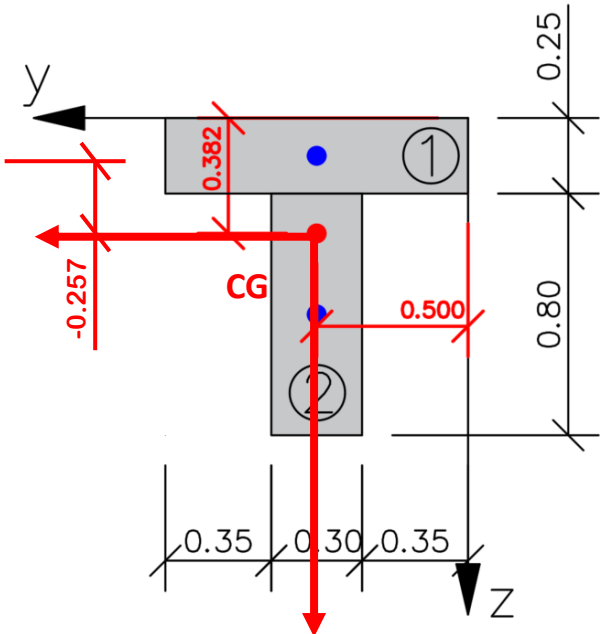
PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI

$$I_y = \frac{1}{12}bh^3 + bhz^2$$

$$I_z = \frac{1}{12}b^3h + bhy^2$$

$$D_{yz} = 0 + bhzy$$

Souřadnice obrazců vztahujeme k těžišti soustavy a nikoliv k počáteční souřadnicové soustavě.



	1	2
$I_{y0} [m^4]$		
$I_{z0} [m^4]$		
$y_i [m]$	0.00E+00	0.00E+00
$z_i [m]$	-2.57E-01	2.68E-01
$I_{yi} [m^4]$		
$I_{zi} [m^4]$		
$D_{yz0} [m^4]$		
$D_{yzi} [m^4]$		

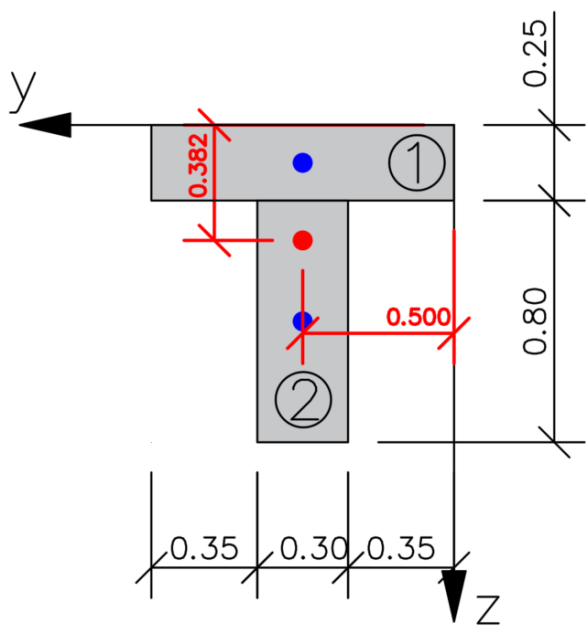
$I_y [m^4]$	
$I_z [m^4]$	
$D_{yz} [m^4]$	

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI

$$I_y = \frac{1}{12}bh^3 + bhz^2$$
$$I_{y,1} = \frac{1}{12}1.0,25^3 + 1.0,25 \cdot (-0,257)^2 = 0.0178 \text{ m}^4$$
$$I_{y,2} = \frac{1}{12}0,3 \cdot 0,8^3 + 0,3 \cdot 0,8 \cdot 0,268^2 = 0.03 \text{ m}^4$$

$$I_z = \frac{1}{12}b^3h + bhy^2$$

$$D_{yz} = 0 + bhyz$$



	1	2
ly0 [m ⁴]	1.30E-03	1.28E-02
lz0 [m ⁴]		
yi [m]	0.00E+00	0.00E+00
zi [m]	-2.57E-01	2.68E-01
lyi [m ⁴]	1.78E-02	3.00E-02
lzi [m ⁴]		
Dyz0 [m ⁴]		
Dyzi [m ⁴]		

ly [m ⁴]	
lz [m ⁴]	
Dyz [m ⁴]	

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI

$$I_y = \frac{1}{12}bh^3 + bhz^2$$

$$I_{y,1} = \frac{1}{12}1.0,25^3 + 1.0,25.(-0,257)^2 = 0.0178 \text{ m}^4$$

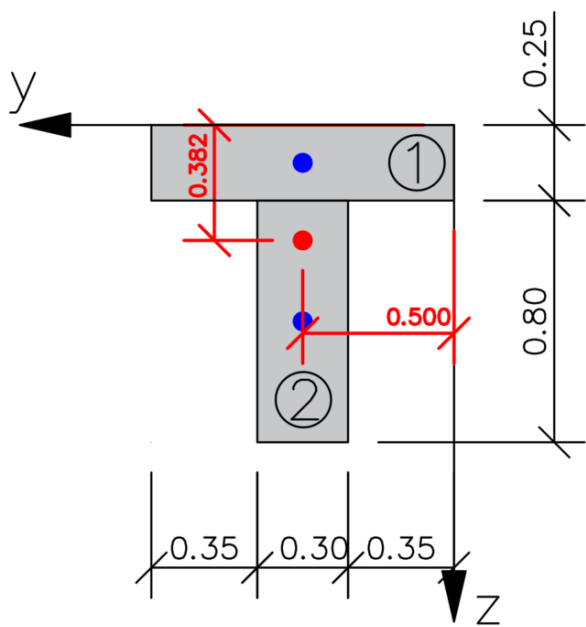
$$I_{y,2} = \frac{1}{12}0,3.0,8^3 + 0,3.0,8.0,268^2 = 0.03 \text{ m}^4$$

$$I_z = \frac{1}{12}b^3h + bhy^2$$

$$I_{z,1} = \frac{1}{12}1^3.0,25 + 1.0,25.0^2 = 0.0208 \text{ m}^4$$

$$I_{z,2} = \frac{1}{12}0,3^3.0,8 + 0,3.0,8.0^2 = 0.0018 \text{ m}^4$$

$$D_{yz} = 0 + bhzy$$



	1	2
ly0 [m ⁴]	1.30E-03	1.28E-02
lz0 [m ⁴]	2.08E-02	1.80E-03
yi [m]	0.00E+00	0.00E+00
zi [m]	-2.57E-01	2.68E-01
lyi [m ⁴]	1.78E-02	3.00E-02
lzi [m ⁴]	2.08E-02	1.80E-03
Dyz0 [m ⁴]		
Dyzi [m ⁴]		

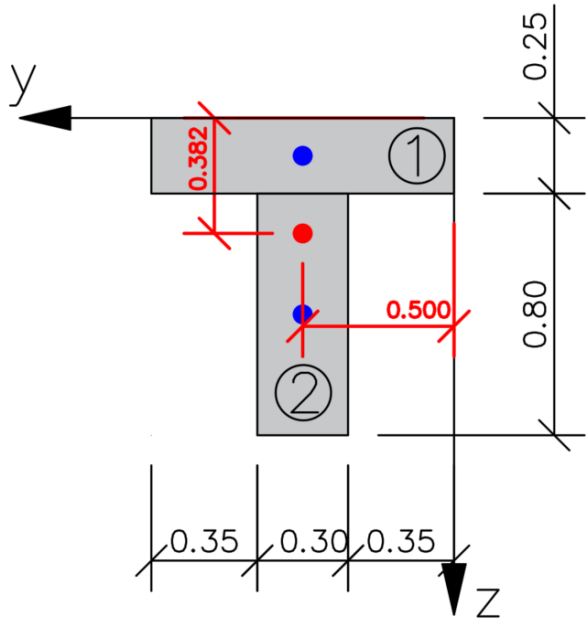
ly [m ⁴]	
lz [m ⁴]	
Dyz [m ⁴]	

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI

$$I_y = \frac{1}{12}bh^3 + bhz^2$$
$$I_{y,1} = \frac{1}{12}1.0,25^3 + 1.0,25.(-0,257)^2 = 0.0178 \text{ m}^4$$
$$I_{y,2} = \frac{1}{12}0,3.0,8^3 + 0,3.0,8.0,268^2 = 0.03 \text{ m}^4$$

$$I_z = \frac{1}{12}b^3h + bhy^2$$
$$I_{z,1} = \frac{1}{12}1^3.0,25 + 1.0,25.0^2 = 0.0208 \text{ m}^4$$
$$I_{z,2} = \frac{1}{12}0,3^3.0,8 + 0,3.0,8.0^2 = 0.0018 \text{ m}^4$$

$$D_{yz} = 0 + bhzy$$
$$D_{yz,1} = 0 + 1.0,25.(-0,257).0 = 0 \text{ m}^4$$
$$D_{yz,2} = 0 + 3.0,8.(0,2679).0 = 0 \text{ m}^4$$



	1	2
ly0 [m ⁴]	1.30E-03	1.28E-02
lz0 [m ⁴]	2.08E-02	1.80E-03
yi [m]	0.00E+00	0.00E+00
zi [m]	-2.57E-01	2.68E-01
lyi [m ⁴]	1.78E-02	3.00E-02
lzi [m ⁴]	2.08E-02	1.80E-03
Dyz0 [m ⁴]	0.00E+00	0.00E+00
Dyzi [m ⁴]	0.00E+00	0.00E+00

ly [m ⁴]	
lz [m ⁴]	
Dyz [m ⁴]	

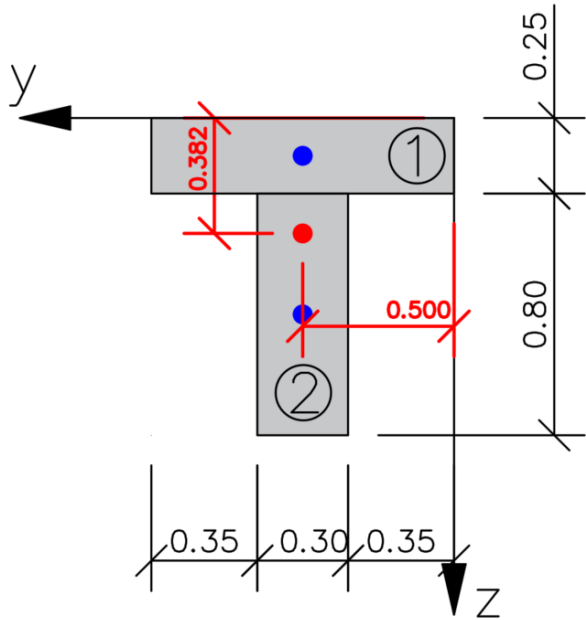
PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI

$$I_y = \frac{1}{12}bh^3 + bhz^2$$
$$I_{y,1} = \frac{1}{12}1.0,25^3 + 1.0,25.(-0,257)^2 = 0.0178 \text{ m}^4$$
$$I_{y,2} = \frac{1}{12}0,3.0,8^3 + 0,3.0,8.0,268^2 = 0.03 \text{ m}^4$$

$$I_z = \frac{1}{12}b^3h + bhy^2$$
$$I_{z,1} = \frac{1}{12}1^3.0,25 + 1.0,25.0^2 = 0.0208 \text{ m}^4$$
$$I_{z,2} = \frac{1}{12}0,3^3.0,8 + 0,3.0,8.0^2 = 0.0018 \text{ m}^4$$

$$D_{yz} = 0 + bhzy$$
$$D_{yz,1} = 0 + 1.0,25.(-0,257).0 = 0 \text{ m}^4$$
$$D_{yz,2} = 0 + 3.0,8.(0,2679).0 = 0 \text{ m}^4$$

$$I_y = I_{y,1} + I_{y,2} = 0.0178 + 0.03 = 0,479 \text{ m}^4$$
$$I_z = I_{z,1} + I_{z,2} = 0.0208 + 0.0018 = 0,0226 \text{ m}^4$$
$$D_{yz} = D_{yz,1} + D_{yz,2} = 0 + 0 = 0 \text{ m}^4$$



	1	2
$I_{y0} \text{ [m}^4\text{]}$	1.30E-03	1.28E-02
$I_{z0} \text{ [m}^4\text{]}$	2.08E-02	1.80E-03
$y_i \text{ [m]}$	0.00E+00	0.00E+00
$z_i \text{ [m]}$	-2.57E-01	2.68E-01
$I_{yi} \text{ [m}^4\text{]}$	1.78E-02	3.00E-02
$I_{zi} \text{ [m}^4\text{]}$	2.08E-02	1.80E-03
$D_{yz0} \text{ [m}^4\text{]}$	0.00E+00	0.00E+00
$D_{yzi} \text{ [m}^4\text{]}$	0.00E+00	0.00E+00

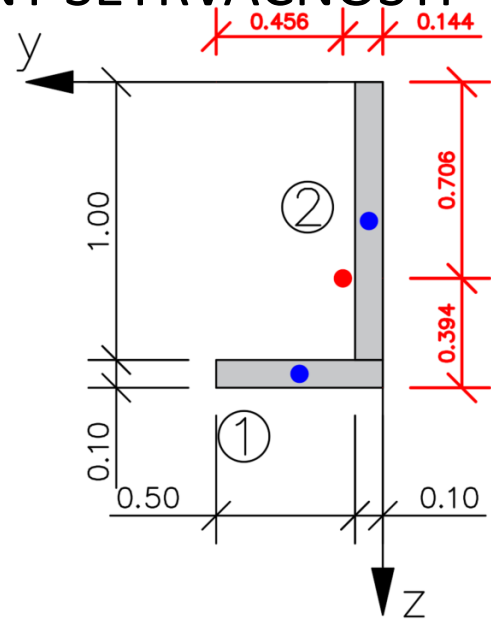
$I_y \text{ [m}^4\text{]}$	4.79E-02
$I_z \text{ [m}^4\text{]}$	2.26E-02
$D_{yz} \text{ [m}^4\text{]}$	0.00E+00

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI

$$I_y = \frac{1}{12}bh^3 + bhz^2$$

$$I_z = \frac{1}{12}b^3h + bhy^2$$

$$D_{yz} = 0 + bhzy$$



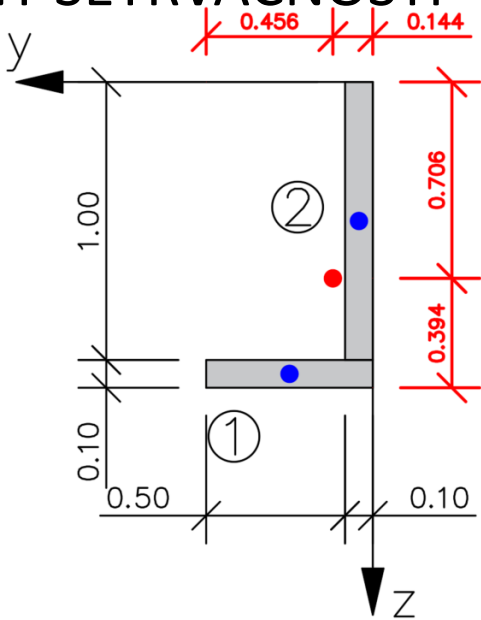
	1	2
Iy0 [m ⁴]		
Iz0 [m ⁴]		
yi [m]	1.56E-01	-9.38E-02
zi [m]	3.44E-01	-2.06E-01
Iyi [m ⁴]		
Izi [m ⁴]		
Dyz0 [m ⁴]		
Dyzi [m ⁴]		

Iy [m ⁴]	
Iz [m ⁴]	
Dyz [m ⁴]	

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI

$$I_y = \frac{1}{12}bh^3 + bhz^2$$
$$I_{y,1} = \frac{1}{12}0,6 \cdot 0,1^3 + 0,6 \cdot 0,1 \cdot 0,344^2 = 0,00714 \text{ m}^4$$
$$I_{y,2} = \frac{1}{12}0,1 \cdot 1^3 + 0,1 \cdot 1 \cdot (-0,206)^2 = 0,012587 \text{ m}^4$$

$$I_z = \frac{1}{12}b^3h + bhy^2$$



	1	2
ly0 [m ⁴]	5.00E-05	8.33E-03
lz0 [m ⁴]		
yi [m]	1.56E-01	-9.38E-02
zi [m]	3.44E-01	-2.06E-01
lyi [m ⁴]	7.14E-03	1.26E-02
lzi [m ⁴]		
Dyz0 [m ⁴]		
Dyzi [m ⁴]		

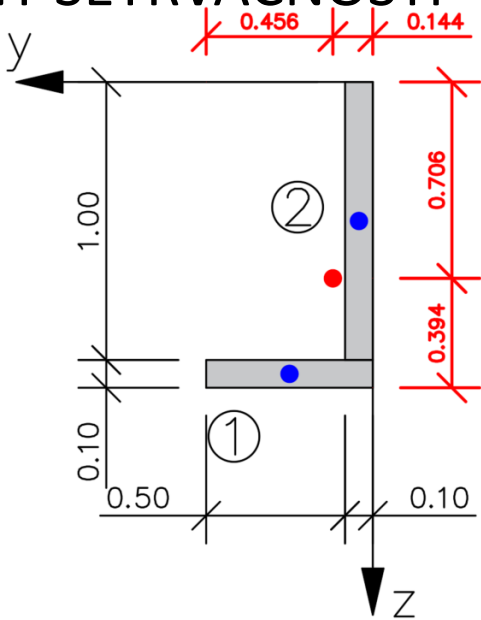
$$D_{yz} = 0 + bhzy$$

ly [m ⁴]	
lz [m ⁴]	
Dyz [m ⁴]	

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI

$$I_y = \frac{1}{12}bh^3 + bhz^2$$
$$I_{y,1} = \frac{1}{12}0,6 \cdot 0,1^3 + 0,6 \cdot 0,1 \cdot 0,344^2 = 0,00714 \text{ m}^4$$
$$I_{y,2} = \frac{1}{12}0,1 \cdot 1^3 + 0,1 \cdot 1 \cdot (-0,206)^2 = 0,012587 \text{ m}^4$$

$$I_z = \frac{1}{12}b^3h + bhy^2$$
$$I_{z,1} = \frac{1}{12}0,6^3 \cdot 0,1 + 0,6 \cdot 0,1 \cdot 0,156^2 = 0,003265 \text{ m}^4$$
$$I_{z,2} = \frac{1}{12}0,1^3 \cdot 1 + 0,1 \cdot 1 \cdot (-0,09375)^2 = 0,000962 \text{ m}^4$$



	1	2
ly0 [m ⁴]	5.00E-05	8.33E-03
lz0 [m ⁴]	1.80E-03	8.33E-05
yi [m]	1.56E-01	-9.38E-02
zi [m]	3.44E-01	-2.06E-01
lyi [m ⁴]	7.14E-03	1.26E-02
lzi [m ⁴]	3.26E-03	9.62E-04
Dyz0 [m ⁴]		
Dyzi [m ⁴]		

ly [m ⁴]	
lz [m ⁴]	
Dyz [m ⁴]	

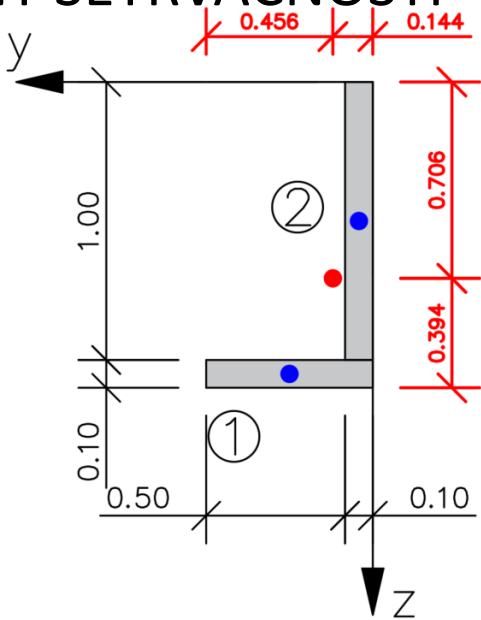
$D_{yz} = 0 + bhzy$

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI

$$I_y = \frac{1}{12}bh^3 + bhz^2$$
$$I_{y,1} = \frac{1}{12}0,6 \cdot 0,1^3 + 0,6 \cdot 0,1 \cdot 0,344^2 = 0,00714 \text{ m}^4$$
$$I_{y,2} = \frac{1}{12}0,1 \cdot 1^3 + 0,1 \cdot 1 \cdot (-0,206)^2 = 0,012587 \text{ m}^4$$

$$I_z = \frac{1}{12}b^3h + bhy^2$$
$$I_{z,1} = \frac{1}{12}0,6^3 \cdot 0,1 + 0,6 \cdot 0,1 \cdot 0,156^2 = 0,003265 \text{ m}^4$$
$$I_{z,2} = \frac{1}{12}0,1^3 \cdot 1 + 0,1 \cdot 1 \cdot (-0,09375)^2 = 0,000962 \text{ m}^4$$

$$D_{yz} = 0 + bhzy$$
$$D_{yz,1} = 0 + 0,6 \cdot 0,1 \cdot 0,344 \cdot 0,156 = 0,003223 \text{ m}^4$$
$$D_{yz,2} = 0 + 0,1 \cdot 1 \cdot (-0,206) \cdot (-0,09375) = 0,001934 \text{ m}^4$$



	1	2
ly0 [m ⁴]	5.00E-05	8.33E-03
lz0 [m ⁴]	1.80E-03	8.33E-05
yi [m]	1.56E-01	-9.38E-02
zi [m]	3.44E-01	-2.06E-01
lyi [m ⁴]	7.14E-03	1.26E-02
lzi [m ⁴]	3.26E-03	9.62E-04
Dyz0 [m ⁴]	0.00E+00	0.00E+00
Dyzi [m ⁴]	3.22E-03	1.93E-03

ly [m ⁴]	
lz [m ⁴]	
Dyz [m ⁴]	

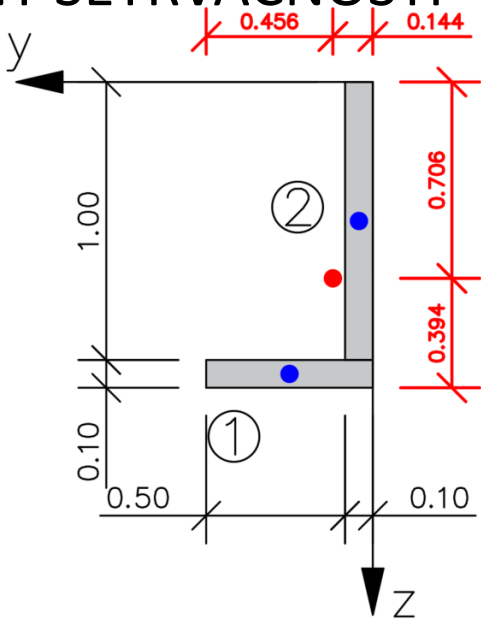
PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI

$$I_y = \frac{1}{12}bh^3 + bhz^2$$
$$I_{y,1} = \frac{1}{12}0,6 \cdot 0,1^3 + 0,6 \cdot 0,1 \cdot 0,344^2 = 0,00714 \text{ m}^4$$
$$I_{y,2} = \frac{1}{12}0,1 \cdot 1^3 + 0,1 \cdot 1 \cdot (-0,206)^2 = 0,012587 \text{ m}^4$$

$$I_z = \frac{1}{12}b^3h + bhy^2$$
$$I_{z,1} = \frac{1}{12}0,6^3 \cdot 0,1 + 0,6 \cdot 0,1 \cdot 0,156^2 = 0,003265 \text{ m}^4$$
$$I_{z,2} = \frac{1}{12}0,1^3 \cdot 1 + 0,1 \cdot 1 \cdot (-0,09375)^2 = 0,000962 \text{ m}^4$$

$$D_{yz} = 0 + bhzy$$
$$D_{yz,1} = 0 + 0,6 \cdot 0,1 \cdot 0,344 \cdot 0,156 = 0,003223 \text{ m}^4$$
$$D_{yz,2} = 0 + 0,1 \cdot 1 \cdot (-0,206) \cdot (-0,09375) = 0,001934 \text{ m}^4$$

$$I_y = I_{y,1} + I_{y,2} = 0,00745 + 0,023587 = 0,019727 \text{ m}^4$$
$$I_z = I_{z,1} + I_{z,2} = 0,003265 + 0,000962 = 0,004227 \text{ m}^4$$
$$D_{yz} = D_{yz,1} + D_{yz,2} = 0,003223 + 0,001934 = 0,005156 \text{ m}^4$$



	1	2
$I_{y0} \text{ [m}^4\text{]}$	5.00E-05	8.33E-03
$I_{z0} \text{ [m}^4\text{]}$	1.80E-03	8.33E-05
$y_i \text{ [m]}$	1.56E-01	-9.38E-02
$z_i \text{ [m]}$	3.44E-01	-2.06E-01
$I_{yi} \text{ [m}^4\text{]}$	7.14E-03	1.26E-02
$I_{zi} \text{ [m}^4\text{]}$	3.26E-03	9.62E-04
$D_{yz0} \text{ [m}^4\text{]}$	0.00E+00	0.00E+00
$D_{yzi} \text{ [m}^4\text{]}$	3.22E-03	1.93E-03

$I_y \text{ [m}^4\text{]}$	1.97E-02
$I_z \text{ [m}^4\text{]}$	4.23E-03
$D_{yz} \text{ [m}^4\text{]}$	5.16E-03

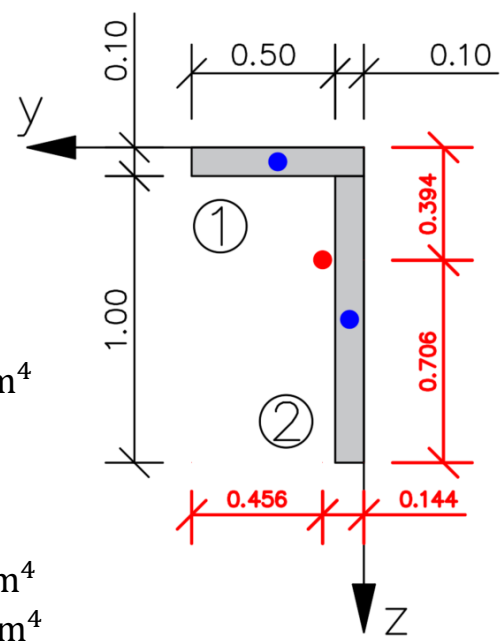
PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI

$$I_y = \frac{1}{12}bh^3 + bhz^2$$
$$I_{y,1} = \frac{1}{12}0,6 \cdot 0,1^3 + 0,6 \cdot 0,1 \cdot (-0,344)^2 = 0,00714 \text{ m}^4$$
$$I_{y,2} = \frac{1}{12}0,1 \cdot 1^3 + 0,1 \cdot 1 \cdot 0,206^2 = 0,012587 \text{ m}^4$$

$$I_z = \frac{1}{12}b^3h + bhy^2$$
$$I_{z,1} = \frac{1}{12}0,6^3 \cdot 0,1 + 0,6 \cdot 0,1 \cdot 0,156^2 = 0,003265 \text{ m}^4$$
$$I_{z,2} = \frac{1}{12}0,1^3 \cdot 1 + 0,1 \cdot 1 \cdot (-0,09375)^2 = 0,000962 \text{ m}^4$$

$$D_{yz} = 0 + bhzy$$
$$D_{yz,1} = 0 + 0,6 \cdot 0,1 \cdot (-0,344) \cdot 0,156 = -0,003223 \text{ m}^4$$
$$D_{yz,2} = 0 + 0,1 \cdot 1 \cdot 0,206 \cdot (-0,09375) = -0,001934 \text{ m}^4$$

$$I_y = I_{y,1} + I_{y,2} = 0,00745 + 0,023587 = 0,019727 \text{ m}^4$$
$$I_z = I_{z,1} + I_{z,2} = 0,003265 + 0,000962 = 0,004227 \text{ m}^4$$
$$D_{yz} = D_{yz,1} + D_{yz,2} = -0,003223 - 0,001934 = -0,005156 \text{ m}^4$$



	1	2
$I_{y0} \text{ [m}^4\text{]}$	5.00E-05	8.33E-03
$I_{z0} \text{ [m}^4\text{]}$	1.80E-03	8.33E-05
$y_i \text{ [m]}$	1.56E-01	-9.38E-02
$z_i \text{ [m]}$	-3.44E-01	2.06E-01
$I_{yi} \text{ [m}^4\text{]}$	7.14E-03	1.26E-02
$I_{zi} \text{ [m}^4\text{]}$	3.26E-03	9.62E-04
$D_{yz0} \text{ [m}^4\text{]}$	0.00E+00	0.00E+00
$D_{yzi} \text{ [m}^4\text{]}$	-3.22E-03	-1.93E-03

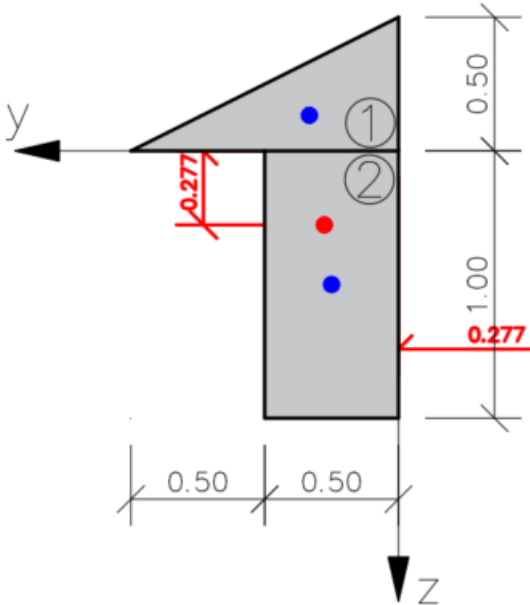
$I_y \text{ [m}^4\text{]}$	1.97E-02
$I_z \text{ [m}^4\text{]}$	4.23E-03
$D_{yz} \text{ [m}^4\text{]}$	-5.16E-03

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI

$$I_y = I_{y, cg} + Az^2$$

$$I_z = I_{z, cg} + Ay^2$$

$$D_{yz} = D_{yz, cg} + Azy$$



	1	2
I_{y0} [m ⁴]		
I_{z0} [m ⁴]		
y_i [m]	5.56E-02	-2.78E-02
z_i [m]	-4.44E-01	2.22E-01
I_{yi} [m ⁴]		
I_{zi} [m ⁴]		
D_{yz0} [m ⁴]		
D_{yzi} [m ⁴]		

I_y [m ⁴]	
I_z [m ⁴]	
D_{yz} [m ⁴]	

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI

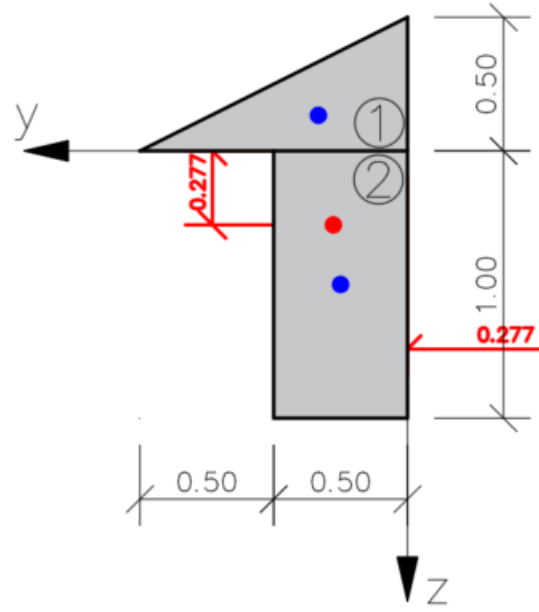
$I_y = I_{y, cg} + Az^2$

$I_{y,1} = \frac{1}{36}bh^3 + \frac{1}{2}bh z^2 = \frac{1}{36}1.0,5^3 + \frac{1}{2}1.0,5. (-0,444)^2 = 0.0529 \text{ m}^4$

$I_{y,2} = \frac{1}{12}bh^3 + bh z^2 = \frac{1}{12}0,5.1^3 + 0,5.1.0,222^2 = 0.0664 \text{ m}^4$

$I_z = I_{z, cg} + Ay^2$

$D_{yz} = D_{yz, cg} + Azy$



	1	2
ly0 [m ⁴]	3.47E-03	4.17E-02
lz0 [m ⁴]		
yi [m]	5.56E-02	-2.78E-02
zi [m]	-4.44E-01	2.22E-01
lyi [m ⁴]	5.29E-02	6.64E-02
lzi [m ⁴]		
Dyz0 [m ⁴]		
Dyzi [m ⁴]		

ly [m ⁴]	
lz [m ⁴]	
Dyz [m ⁴]	

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI

$$I_y = I_{y, cg} + Az^2$$

$$I_{y,1} = \frac{1}{36}bh^3 + \frac{1}{2}bh z^2 = \frac{1}{36}1.0,5^3 + \frac{1}{2}1.0,5. (-0,444)^2 = 0.0529 \text{ m}^4$$

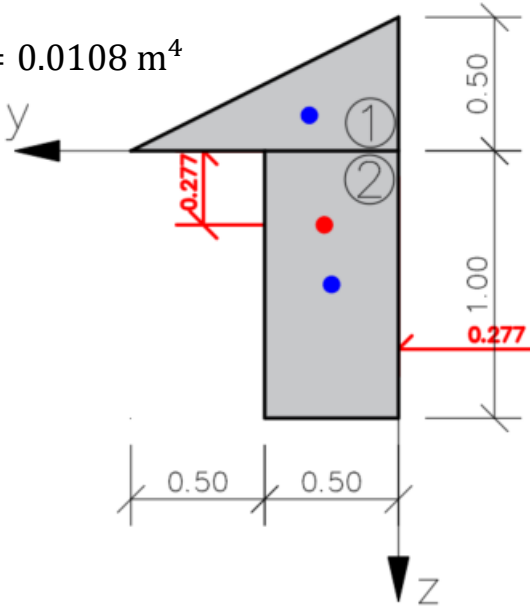
$$I_{y,2} = \frac{1}{12}bh^3 + bh z^2 = \frac{1}{12}0,5. 1^3 + 0,5.1.0,222^2 = 0.0664 \text{ m}^4$$

$$I_z = I_{z, cg} + Ay^2$$

$$I_{z,1} = \frac{1}{36}b^3h + \frac{1}{2}bhy^2 = \frac{1}{36}1^3. 0,5 + \frac{1}{2}1.0,5.0,0556^2 = 0.0147 \text{ m}^4$$

$$I_{z,2} = \frac{1}{12}b^3h + bhy^2 = \frac{1}{12}0,5^3. 1 + 0,5.1. (-0,028)^2 = 0.0108 \text{ m}^4$$

$$D_{yz} = D_{yz, cg} + Azy$$



	1	2
ly0 [m ⁴]	3.47E-03	4.17E-02
lz0 [m ⁴]	1.39E-02	1.04E-02
yi [m]	5.56E-02	-2.78E-02
zi [m]	-4.44E-01	2.22E-01
lyi [m ⁴]	5.29E-02	6.64E-02
lzi [m ⁴]	1.47E-02	1.08E-02
Dyz0 [m ⁴]		
Dyzi [m ⁴]		

ly [m ⁴]	
lz [m ⁴]	
Dyz [m ⁴]	

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI

$I_y = I_{y, cg} + Az^2$

$I_{y,1} = \frac{1}{36}bh^3 + \frac{1}{2}bh z^2 = \frac{1}{36}1.0,5^3 + \frac{1}{2}1.0,5.(-0,444)^2 = 0.0529 \text{ m}^4$

$I_{y,2} = \frac{1}{12}bh^3 + bh z^2 = \frac{1}{12}0,5.1^3 + 0,5.1.0,222^2 = 0.0664 \text{ m}^4$

$I_z = I_{z, cg} + Ay^2$

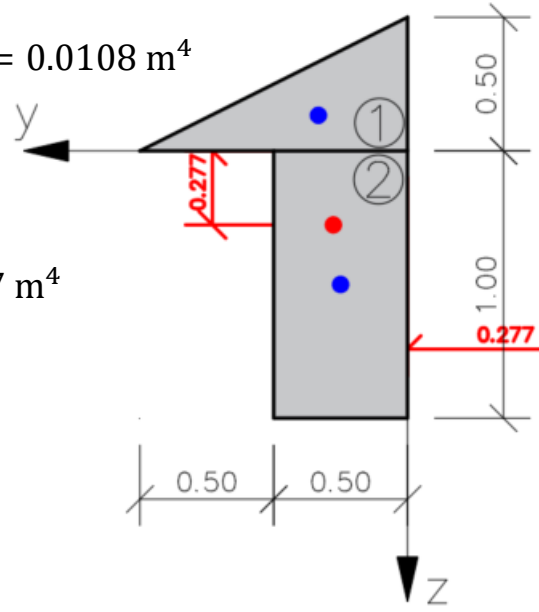
$I_{z,1} = \frac{1}{36}b^3h + \frac{1}{2}bhy^2 = \frac{1}{36}1^3.0,5 + \frac{1}{2}1.0,5.0,0556^2 = 0.0147 \text{ m}^4$

$I_{z,2} = \frac{1}{12}b^3h + bhy^2 = \frac{1}{12}0,5^3.1 + 0,5.1.(-0,028)^2 = 0.0108 \text{ m}^4$

$D_{yz} = D_{yz, cg} + Azy$

$D_{yz,1} = \frac{1^2 0,5^2}{72} + 0,5.1.0,5.0,556.(-0,444) = -0,0027 \text{ m}^4$

$D_{yz,2} = 0 + 0,5.1.(-0,028).0,222 = -0,0031 \text{ m}^4$



	1	2
$I_{y0} \text{ [m}^4\text{]}$	3.47E-03	4.17E-02
$I_{z0} \text{ [m}^4\text{]}$	1.39E-02	1.04E-02
$y_i \text{ [m]}$	5.56E-02	-2.78E-02
$z_i \text{ [m]}$	-4.44E-01	2.22E-01
$I_{yi} \text{ [m}^4\text{]}$	5.29E-02	6.64E-02
$I_{zi} \text{ [m}^4\text{]}$	1.47E-02	1.08E-02
$D_{yz0} \text{ [m}^4\text{]}$	3.47E-03	0.00E+00
$D_{yzi} \text{ [m}^4\text{]}$	-2.70E-03	-3.09E-03

$I_y \text{ [m}^4\text{]}$	
$I_z \text{ [m}^4\text{]}$	
$D_{yz} \text{ [m}^4\text{]}$	

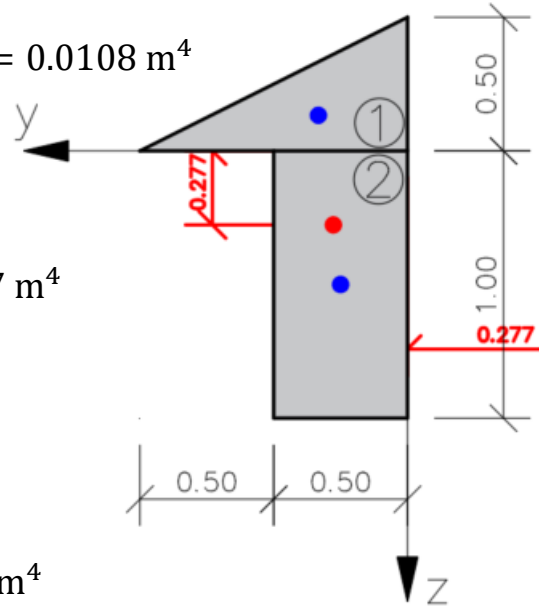
PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI

$$I_y = I_{y, cg} + Az^2$$
$$I_{y,1} = \frac{1}{36}bh^3 + \frac{1}{2}bhz^2 = \frac{1}{36}1.0,5^3 + \frac{1}{2}1.0,5.(-0,444)^2 = 0.0529 \text{ m}^4$$
$$I_{y,2} = \frac{1}{12}bh^3 + bhz^2 = \frac{1}{12}0,5.1^3 + 0,5.1.0,222^2 = 0.0664 \text{ m}^4$$

$$I_z = I_{z, cg} + Ay^2$$
$$I_{z,1} = \frac{1}{36}b^3h + \frac{1}{2}bhy^2 = \frac{1}{36}1^3.0,5 + \frac{1}{2}1.0,5.0,0556^2 = 0.0147 \text{ m}^4$$
$$I_{z,2} = \frac{1}{12}b^3h + bhy^2 = \frac{1}{12}0,5^3.1 + 0,5.1.(-0,028)^2 = 0.0108 \text{ m}^4$$

$$D_{yz} = D_{yz, cg} + Azy$$
$$D_{yz,1} = \frac{1^2 0,5^2}{72} + 0,5.1.0,5.0,556.(-0,444) = -0,0027 \text{ m}^4$$
$$D_{yz,2} = 0 + 0,5.1.(-0,028).0,222 = -0,0031 \text{ m}^4$$

$$I_y = I_{y,1} + I_{y,2} = 0,0529 + 0,0664 = 0,1192 \text{ m}^4$$
$$I_z = I_{z,1} + I_{z,2} = 0,0147 + 0,0108 = 0,0255 \text{ m}^4$$
$$D_{yz} = D_{yz,1} + D_{yz,2} = -0,0027 - 0,0031 = -0,0058 \text{ m}^4$$



	1	2
ly0 [m ⁴]	3.47E-03	4.17E-02
lz0 [m ⁴]	1.39E-02	1.04E-02
yi [m]	5.56E-02	-2.78E-02
zi [m]	-4.44E-01	2.22E-01
lyi [m ⁴]	5.29E-02	6.64E-02
lzi [m ⁴]	1.47E-02	1.08E-02
Dyz0 [m ⁴]	3.47E-03	0.00E+00
Dyzi [m ⁴]	-2.70E-03	-3.09E-03

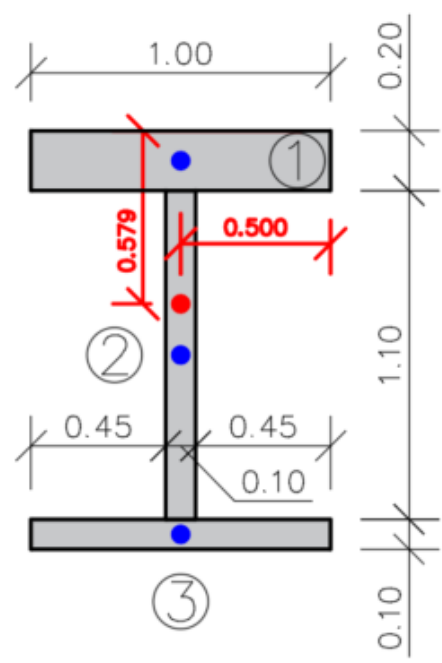
ly [m ⁴]	1.19E-01
lz [m ⁴]	2.55E-02
Dyz [m ⁴]	-5.79E-03

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI

$$I_y = \frac{1}{12}bh^3 + bhz^2$$

$$I_z = \frac{1}{12}b^3h + bhy^2$$

$$D_{yz} = 0 + bhzy$$



	1	2	3
I_{y0} [m ⁴]			
I_{z0} [m ⁴]			
y_i [m]	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
z_i [m]	-4.79E-01	1.71E-01	7.71E-01
I_{yi} [m ⁴]			
I_{zi} [m ⁴]			
D_{yz0} [m ⁴]			
D_{yzi} [m ⁴]			

I_y [m ⁴]	
I_z [m ⁴]	
D_{yz} [m ⁴]	

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI

$$I_y = \frac{1}{12}bh^3 + bhz^2$$

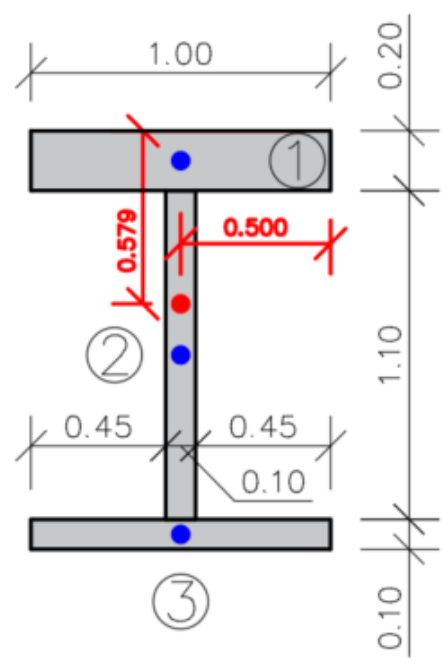
$$I_{y,1} = \frac{1}{12}1.0,2^3 + 1.0,2.(-0,48)^2 = 0,047 \text{ m}^4$$

$$I_{y,2} = \frac{1}{12}0,1.1,1^3 + 0,1.1,1.0,171^2 = 0,014 \text{ m}^4$$

$$I_{y,3} = \frac{1}{12}1.0,1^3 + 1.0,1.1.0,771^2 = 0,06 \text{ m}^4$$

$$I_z = \frac{1}{12}b^3h + bhy^2$$

$$D_{yz} = 0 + bhzy$$



	1	2	3
$I_{y0} \text{ [m}^4\text{]}$	6.67E-04	1.11E-02	8.33E-05
$I_{z0} \text{ [m}^4\text{]}$			
$y_i \text{ [m]}$	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
$z_i \text{ [m]}$	-4.79E-01	1.71E-01	7.71E-01
$I_{yi} \text{ [m}^4\text{]}$	4.66E-02	1.43E-02	5.95E-02
$I_{zi} \text{ [m}^4\text{]}$			
$D_{yz0} \text{ [m}^4\text{]}$			
$D_{yzi} \text{ [m}^4\text{]}$			

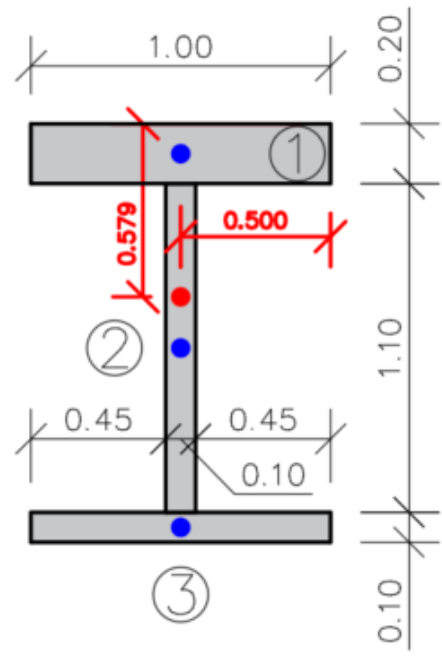
$I_y \text{ [m}^4\text{]}$	
$I_z \text{ [m}^4\text{]}$	
$D_{yz} \text{ [m}^4\text{]}$	

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI

$$I_y = \frac{1}{12}bh^3 + bhz^2$$
$$I_{y,1} = \frac{1}{12}1.0,2^3 + 1.0,2.(-0,48)^2 = 0,047 \text{ m}^4$$
$$I_{y,2} = \frac{1}{12}0,1.1,1^3 + 0,1.1,1.0,171^2 = 0,014 \text{ m}^4$$
$$I_{y,3} = \frac{1}{12}1.0,1^3 + 1.0,1,1.0,771^2 = 0,06 \text{ m}^4$$

$$I_z = \frac{1}{12}b^3h + bhy^2$$
$$I_{z,1} = \frac{1}{12}1^3.0,2 + 1.0,2.0^2 = 0,017 \text{ m}^4$$
$$I_{z,2} = \frac{1}{12}0,1^3.1,1 + 0,1.1,1.0^2 = 0,00009 \text{ m}^4$$
$$I_{z,3} = \frac{1}{12}1^3.0,1 + 1.0,1.0^2 = 0,008 \text{ m}^4$$

$$D_{yz} = 0 + bhyz$$



	1	2	3
$I_{y0} \text{ [m}^4\text{]}$	6.67E-04	1.11E-02	8.33E-05
$I_{z0} \text{ [m}^4\text{]}$	1.67E-02	9.17E-05	8.33E-03
$y_i \text{ [m]}$	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
$z_i \text{ [m]}$	-4.79E-01	1.71E-01	7.71E-01
$I_{y1} \text{ [m}^4\text{]}$	4.66E-02	1.43E-02	5.95E-02
$I_{z1} \text{ [m}^4\text{]}$	1.67E-02	9.17E-05	8.33E-03
$D_{yz0} \text{ [m}^4\text{]}$			
$D_{yz1} \text{ [m}^4\text{]}$			

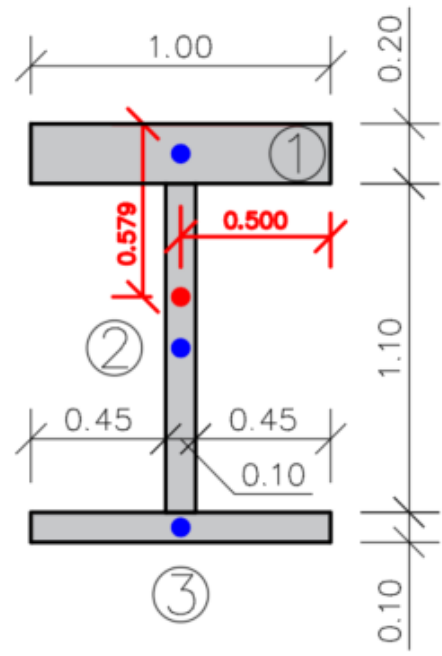
$I_y \text{ [m}^4\text{]}$	
$I_z \text{ [m}^4\text{]}$	
$D_{yz} \text{ [m}^4\text{]}$	

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI

$$I_y = \frac{1}{12}bh^3 + bhz^2$$
$$I_{y,1} = \frac{1}{12}1.0,2^3 + 1.0,2.(-0,48)^2 = 0,047 \text{ m}^4$$
$$I_{y,2} = \frac{1}{12}0,1.1,1^3 + 0,1.1,1.0,171^2 = 0,014 \text{ m}^4$$
$$I_{y,3} = \frac{1}{12}1.0,1^3 + 1.0,1,1.0,771^2 = 0,06 \text{ m}^4$$

$$I_z = \frac{1}{12}b^3h + bhy^2$$
$$I_{z,1} = \frac{1}{12}1^3.0,2 + 1.0,2.0^2 = 0,017 \text{ m}^4$$
$$I_{z,2} = \frac{1}{12}0,1^3.1,1 + 0,1.1,1.0^2 = 0,00009 \text{ m}^4$$
$$I_{z,3} = \frac{1}{12}1^3.0,1 + 1.0,1.0^2 = 0,008 \text{ m}^4$$

$$D_{yz} = 0 + bhyz$$
$$D_{yz,1} = 0 + 1.0,2.(-0,48).0 = 0 \text{ m}^4$$
$$D_{yz,2} = 0 + 0,1.1,1.0,171.0 = 0 \text{ m}^4$$
$$D_{yz,3} = 0 + 1.0,1.0,771.0 = 0 \text{ m}^4$$



	1	2	3
ly0 [m ⁴]	6.67E-04	1.11E-02	8.33E-05
lz0 [m ⁴]	1.67E-02	9.17E-05	8.33E-03
yi [m]	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
zi [m]	-4.79E-01	1.71E-01	7.71E-01
lyi [m ⁴]	4.66E-02	1.43E-02	5.95E-02
lzi [m ⁴]	1.67E-02	9.17E-05	8.33E-03
Dyz0 [m ⁴]	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
Dyzi [m ⁴]	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00

ly [m ⁴]	
lz [m ⁴]	
Dyz [m ⁴]	

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI

$$I_y = \frac{1}{12}bh^3 + bhz^2$$

$$I_{y,1} = \frac{1}{12}1.0,2^3 + 1.0,2.(-0,48)^2 = 0,047 \text{ m}^4$$

$$I_{y,2} = \frac{1}{12}0,1.1,1^3 + 0,1.1,1.0,171^2 = 0,014 \text{ m}^4$$

$$I_{y,3} = \frac{1}{12}1.0,1^3 + 1.0,1,1.0,771^2 = 0,06 \text{ m}^4$$

$$I_z = \frac{1}{12}b^3h + bhy^2$$

$$I_{z,1} = \frac{1}{12}1^3.0,2 + 1.0,2.0^2 = 0,017 \text{ m}^4$$

$$I_{z,2} = \frac{1}{12}0,1^3.1,1 + 0,1.1,1.0^2 = 0,00009 \text{ m}^4$$

$$I_{z,3} = \frac{1}{12}1^3.0,1 + 1.0,1.0^2 = 0,008 \text{ m}^4$$

$$D_{yz} = 0 + bhyz$$

$$D_{yz,1} = 0 + 1.0,2.(-0,48).0 = 0 \text{ m}^4$$

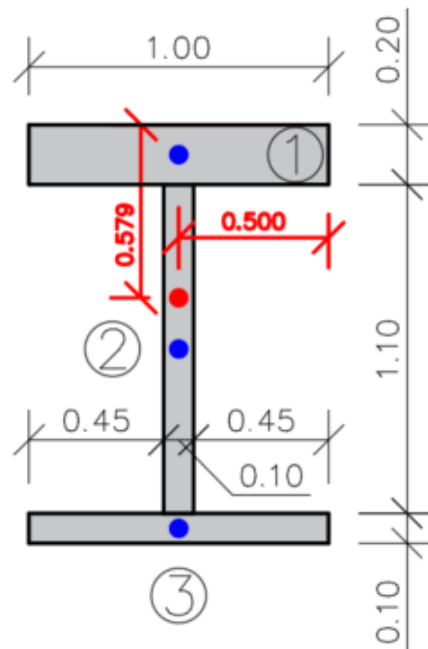
$$D_{yz,2} = 0 + 0,1.1,1.0,171.0 = 0 \text{ m}^4$$

$$D_{yz,3} = 0 + 1.0,1.0,771.0 = 0 \text{ m}^4$$

$$I_y = I_{y,1} + I_{y,2} + I_{y,3} = 0,047 + 0,014 + 0,06 = 0,12 \text{ m}^4$$

$$I_z = I_{z,1} + I_{z,2} + I_{z,3} = 0,017 + 0,00009 + 0,008 = 0,025 \text{ m}^4$$

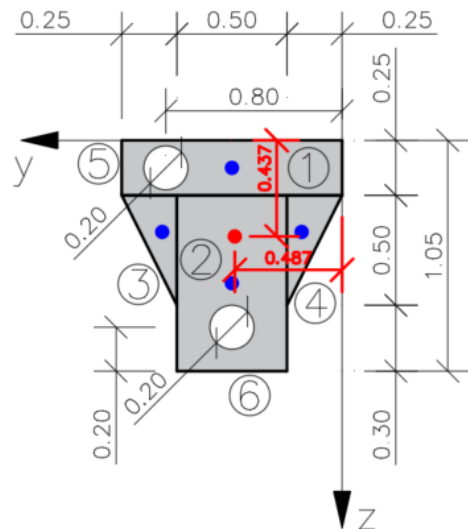
$$D_{yz} = D_{yz,1} + D_{yz,2} + D_{yz,3} = 0 + 0 + 0 = 0 \text{ m}^4$$



	1	2	3
$I_{y0} [\text{m}^4]$	6.67E-04	1.11E-02	8.33E-05
$I_{z0} [\text{m}^4]$	1.67E-02	9.17E-05	8.33E-03
$y_i [\text{m}]$	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
$z_i [\text{m}]$	-4.79E-01	1.71E-01	7.71E-01
$I_{yi} [\text{m}^4]$	4.66E-02	1.43E-02	5.95E-02
$I_{zi} [\text{m}^4]$	1.67E-02	9.17E-05	8.33E-03
$D_{yz0} [\text{m}^4]$	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
$D_{yzi} [\text{m}^4]$	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00

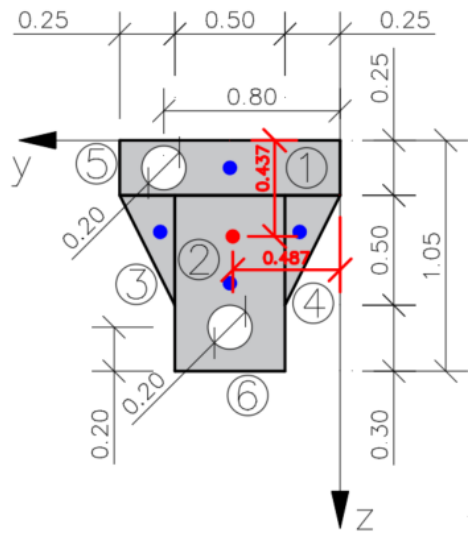
$I_y [\text{m}^4]$	1.20E-01
$I_z [\text{m}^4]$	2.51E-02
$D_{yz} [\text{m}^4]$	0.00E+00

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI



	1	2	3	4	5	6
$I_{y0} \text{ [m}^4\text{]}$						
$I_{z0} \text{ [m}^4\text{]}$						
$y_i \text{ [m]}$	1.32E-02	1.32E-02	3.30E-01	-3.04E-01	3.13E-01	1.30E-02
$z_i \text{ [m]}$	-3.12E-01	2.13E-01	-2.05E-02	-2.05E-02	-3.12E-01	4.13E-01
$I_{yi} \text{ [m}^4\text{]}$						
$I_{zi} \text{ [m}^4\text{]}$						
$D_{yz0} \text{ [m}^4\text{]}$						
$D_{yzi} \text{ [m}^4\text{]}$						

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI



$$I_y = I_{y, cg} + b h z^2$$

$$I_{y,1} = \frac{1}{12} 1.0,25^3 + 1.0,25. (-0,312)^2 = 0,0256 \text{ m}^4$$

$$I_{y,2} = \frac{1}{12} 0,5.0,8^3 + 0,5.0,8.0,213^2 = 0,0395 \text{ m}^4$$

$$I_{y,3} = \frac{1}{36} 0,25. 0,5^3 + 0,5.0,5.0,25. (-0,02)^2 = 8,94e - 4 \text{ m}^4$$

$$I_{y,4} = \frac{1}{36} 0,25. 0,5^3 + 0,5.0,5.0,25. (-0,02)^2 = 8,94e - 4 \text{ m}^4$$

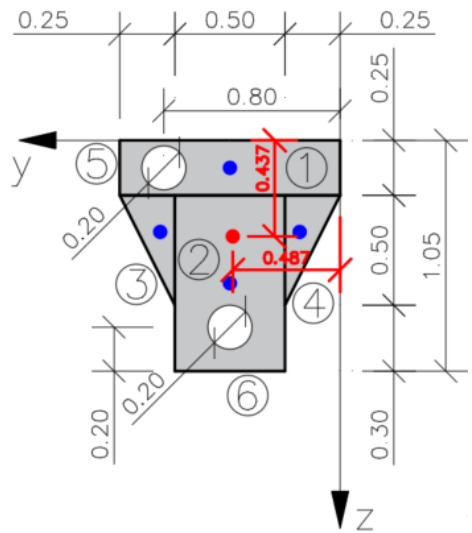
$$I_{y,5} = -\pi. 0,1^4 - \pi 0,1^2. (-0,31)^2 = -3,37e - 3 \text{ m}^4$$

$$I_{y,6} = -\pi. 0,1^4 - \pi 0,1^2. 0,413^2 = -5,67e - 3 \text{ m}^4$$

	1	2	3	4	5	6
Iy0 [m ⁴]	1.30E-03	2.13E-02	8.68E-04	8.68E-04	-3.14E-04	-3.14E-04
Iz0 [m ⁴]						
yi [m]	1.32E-02	1.32E-02	3.30E-01	-3.04E-01	3.13E-01	1.30E-02
zi [m]	-3.12E-01	2.13E-01	-2.05E-02	-2.05E-02	-3.12E-01	4.13E-01
Iyi [m ⁴]	2.56E-02	3.95E-02	8.94E-04	8.94E-04	-3.37E-03	-5.67E-03
Izi [m ⁴]						
Dyz0 [m ⁴]						
Dyzi [m ⁴]						

Iy [m ⁴]	
Iz [m ⁴]	
Dyz [m ⁴]	

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI



$$I_y = I_{y, cg} + b h z^2$$

$$I_{y,1} = \frac{1}{12} 1.0,25^3 + 1.0,25. (-0,312)^2 = 0,0256 \text{ m}^4$$

$$I_{y,2} = \frac{1}{12} 0,5.0,8^3 + 0,5.0,8.0,213^2 = 0,0395 \text{ m}^4$$

$$I_{y,3} = \frac{1}{36} 0,25.0,5^3 + 0,5.0,5.0,25. (-0,02)^2 = 8,94e - 4 \text{ m}^4$$

$$I_{y,4} = \frac{1}{36} 0,25.0,5^3 + 0,5.0,5.0,25. (-0,02)^2 = 8,94e - 4 \text{ m}^4$$

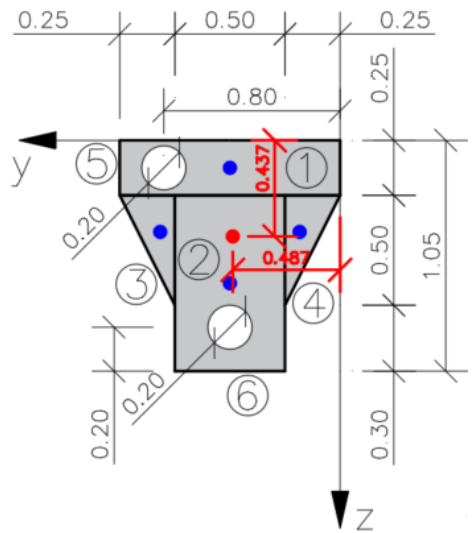
$$I_{y,5} = -\pi.0,1^4 - \pi0,1^2. (-0,31)^2 = -3,37e - 3 \text{ m}^4$$

$$I_{y,6} = -\pi.0,1^4 - \pi0,1^2.0,413^2 = -5,67e - 3 \text{ m}^4$$

	1	2	3	4	5	6
Iy0 [m ⁴]	1.30E-03	2.13E-02	8.68E-04	8.68E-04	-3.14E-04	-3.14E-04
Iz0 [m ⁴]						
yi [m]	1.32E-02	1.32E-02	3.30E-01	-3.04E-01	3.13E-01	1.30E-02
zi [m]	-3.12E-01	2.13E-01	-2.05E-02	-2.05E-02	-3.12E-01	4.13E-01
Iyi [m ⁴]	2.56E-02	3.95E-02	8.94E-04	8.94E-04	-3.37E-03	-5.67E-03
Izi [m ⁴]						
Dyz0 [m ⁴]						
Dyzi [m ⁴]						

Iy [m ⁴]	
Iz [m ⁴]	
Dyz [m ⁴]	

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI



$$I_z = I_{z, cg} + b h y^2$$

$$I_{z,1} = \frac{1}{12} 1^3 \cdot 0,25 + 1,0 \cdot 25 \cdot 0,0132^2 = 0,0209 \text{ m}^4$$

$$I_{z,2} = \frac{1}{12} 0,5^3 \cdot 0,8 + 0,5 \cdot 0,8 \cdot 0,0132^2 = 0,0084 \text{ m}^4$$

$$I_{z,3} = \frac{1}{36} 0,25^3 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,25 \cdot 0,33^2 = 7e - 3 \text{ m}^4$$

$$I_{z,4} = \frac{1}{36} 0,25^3 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,25 \cdot (-0,33)^2 = 7e - 3 \text{ m}^4$$

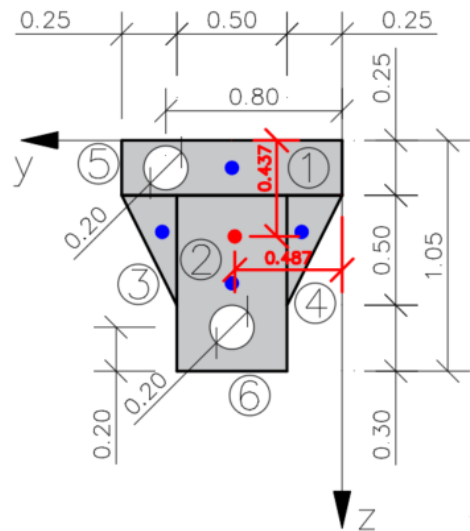
$$I_{z,5} = -\pi \cdot 0,1^4 - \pi \cdot 0,1^2 \cdot 0,313^2 = -3,39e - 3 \text{ m}^4$$

$$I_{z,6} = -\pi \cdot 0,1^4 - \pi \cdot 0,1^2 \cdot 0,013^2 = -3,19e - 4 \text{ m}^4$$

	1	2	3	4	5	6
Iy0 [m ⁴]	1.30E-03	2.13E-02	8.68E-04	8.68E-04	-3.14E-04	-3.14E-04
Iz0 [m ⁴]	2.08E-02	8.33E-03	2.17E-04	2.17E-04	-3.14E-04	-3.14E-04
yi [m]	1.32E-02	1.32E-02	3.30E-01	-3.04E-01	3.13E-01	1.30E-02
zi [m]	-3.12E-01	2.13E-01	-2.05E-02	-2.05E-02	-3.12E-01	4.13E-01
Iyi [m ⁴]	2.56E-02	3.95E-02	8.94E-04	8.94E-04	-3.37E-03	-5.67E-03
Izi [m ⁴]	2.09E-02	8.40E-03	7.00E-03	5.97E-03	-3.39E-03	-3.19E-04
Dyz0 [m ⁴]						
Dyzi [m ⁴]						

Iy [m ⁴]	
Iz [m ⁴]	
Dyz [m ⁴]	

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI

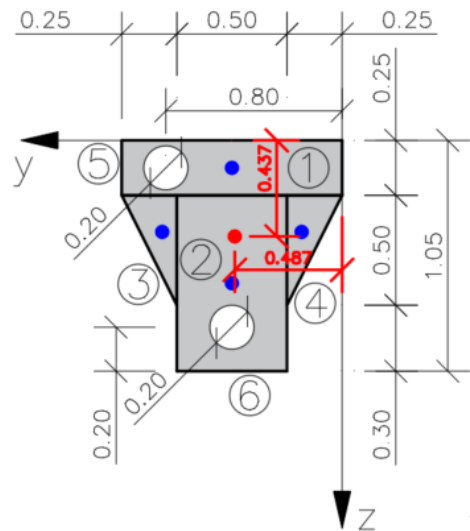


	1	2	3	4	5	6
$I_{y0} [m^4]$	1.30E-03	2.13E-02	8.68E-04	8.68E-04	-3.14E-04	-3.14E-04
$I_{z0} [m^4]$	2.08E-02	8.33E-03	2.17E-04	2.17E-04	-3.14E-04	-3.14E-04
$y_i [m]$	1.32E-02	1.32E-02	3.30E-01	-3.04E-01	3.13E-01	1.30E-02
$z_i [m]$	-3.12E-01	2.13E-01	-2.05E-02	-2.05E-02	-3.12E-01	4.13E-01
$I_{yi} [m^4]$	2.56E-02	3.95E-02	8.94E-04	8.94E-04	-3.37E-03	-5.67E-03
$I_{zi} [m^4]$	2.09E-02	8.40E-03	7.00E-03	5.97E-03	-3.39E-03	-3.19E-04
$D_{yz0} [m^4]$	0.00E+00	0.00E+00	-2.17E-04	2.17E-04	0.00E+00	0.00E+00
$D_{yzi} [m^4]$	-1.03E-03	1.13E-03	-6.39E-04	6.06E-04	3.07E-03	-1.69E-04

$$D_{yz} = D_{yz,cg} + bhyz$$
$$D_{yz,1} = 1.0,25.0,0132.(-0,312) = -1,03e - 3 m^4$$
$$D_{yz,2} = 0,5.0,8.0,0132.0,213 = 1,13e - 3 m^4$$
$$D_{yz,3} = -\frac{1}{72}0,25^2.0,5^2 + 0,5.0,5.0,25.0,33.0,0205 = -6,39e - 4 m^4$$
$$D_{yz,4} = \frac{1}{72}0,25^2.0,5^2 + 0,5.0,5.0,25.(-0,304).0,0205 = 6,06e - 4 m^4$$
$$D_{yz,5} = 0 - \pi0,1^2.0,313.(-0,312) = 3,07e - 3 m^4$$
$$D_{yz,6} = 0 - \pi0,1^2.0,013.0,413 = -1,69e - 4 m^4$$

$I_y [m^4]$	
$I_z [m^4]$	
$D_{yz} [m^4]$	

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY - MOMENT SETRVAČNOSTI



	1	2	3	4	5	6
$I_{y0} [m^4]$	1.30E-03	2.13E-02	8.68E-04	8.68E-04	-3.14E-04	-3.14E-04
$I_{z0} [m^4]$	2.08E-02	8.33E-03	2.17E-04	2.17E-04	-3.14E-04	-3.14E-04
$y_i [m]$	1.32E-02	1.32E-02	3.30E-01	-3.04E-01	3.13E-01	1.30E-02
$z_i [m]$	-3.12E-01	2.13E-01	-2.05E-02	-2.05E-02	-3.12E-01	4.13E-01
$I_{yi} [m^4]$	2.56E-02	3.95E-02	8.94E-04	8.94E-04	-3.37E-03	-5.67E-03
$I_{zi} [m^4]$	2.09E-02	8.40E-03	7.00E-03	5.97E-03	-3.39E-03	-3.19E-04
$D_{yz0} [m^4]$	0.00E+00	0.00E+00	-2.17E-04	2.17E-04	0.00E+00	0.00E+00
$D_{yzi} [m^4]$	-1.03E-03	1.13E-03	-6.39E-04	6.06E-04	3.07E-03	-1.69E-04

$$D_{yz} = D_{yz,cg} + bhyz$$

$$D_{yz,1} = 1.0,25.0,0132.(-0,312) = -1,03e - 3 \text{ m}^4$$

$$D_{yz,2} = 0,5.0,8.0,0132.0,213 = 1,13e - 3 \text{ m}^4$$

$$D_{yz,3} = -\frac{1}{72}0,25^2 \cdot 0,5^2 + 0,5.0,5.0,25.0,33.0,0205 = -6,39e - 4 \text{ m}^4$$

$$D_{yz,4} = \frac{1}{72}0,25^2 \cdot 0,5^2 + 0,5.0,5.0,25.(-0,304) \cdot 0,0205 = 6,06e - 4 \text{ m}^4$$

$$D_{yz,5} = 0 - \pi 0,1^2 \cdot 0,313 \cdot (-0,312) = 3,07e - 3 \text{ m}^4$$

$$D_{yz,6} = 0 - \pi 0,1^2 \cdot 0,013 \cdot 0,413 = -1,69e - 4 \text{ m}^4$$

$I_y [m^4]$	5.79E-02
$I_z [m^4]$	3.85E-02
$D_{yz} [m^4]$	2.96E-03

- TĚŽIŠTĚ
- MOMENT SETRVAČNOSTI
- **POLOMĚR SETRVAČNOSTI**

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY – POLOMĚR SETRVAČNOSTI

Obdobně jako složky napětí a deformace i složky setrvačnosti je možné podrobit transformačnímu vztahu pro tenzory a nalézt takovou transformaci, pro kterou bude platit $I_{ii} \neq 0, I_{ij} = 0$. V takovém případě mluvíme o I_{ii} jako o hlavních momentech setrvačnosti

$$\mathbf{I}' = \mathbf{T} \mathbf{I} \mathbf{T}^T$$

$$\begin{bmatrix} I'_{xx} & -D'_{xy} & -D'_{xz} \\ -D'_{xy} & I'_{yy} & -D'_{yz} \\ -D'_{xz} & -D'_{yz} & I'_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx} & -D_{xy} & -D_{xz} \\ -D_{xy} & I_{yy} & -D_{yz} \\ -D_{xz} & -D_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11} & t_{21} & t_{31} \\ t_{12} & t_{22} & t_{32} \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} \end{bmatrix}$$

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY – POLOMĚR SETRVAČNOSTI

Obdobně jako složky napětí a deformace i složky setrvačnosti je možné podrobit transformačnímu vztahu pro tenzory a nalézt takovou transformaci, pro kterou bude platit $I_{ii} \neq 0, I_{ij} = 0$. V takovém případě mluvíme o I_{ii} jako o hlavních momentech setrvačnosti

$$\mathbf{I}' = \mathbf{T} \mathbf{I} \mathbf{T}^T$$

$$\begin{bmatrix} I'_{xx} & -D'_{xy} & -D'_{xz} \\ -D'_{xy} & I'_{yy} & -D'_{yz} \\ -D'_{xz} & -D'_{yz} & I'_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx} & -D_{xy} & -D_{xz} \\ -D_{xy} & I_{yy} & -D_{yz} \\ -D_{xz} & -D_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11} & t_{21} & t_{31} \\ t_{12} & t_{22} & t_{32} \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} \end{bmatrix}$$

Pro 2D se formulace zjednoduší na

$$\begin{bmatrix} I'_{yy} & -D'_{yz} \\ -D'_{yz} & I'_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma \\ -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{yy} & -D_{yz} \\ -D_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma \\ \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}$$

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY – POLOMĚR SETRVAČNOSTI

Obdobně jako složky napětí a deformace i složky setrvačnosti je možné podrobit transformačnímu vztahu pro tenzory a nalézt takovou transformaci, pro kterou bude platit $I_{ii} \neq 0, I_{ij} = 0$. V takovém případě mluvíme o I_{ii} jako o hlavních momentech setrvačnosti

$$\mathbf{I}' = \mathbf{T} \mathbf{I} \mathbf{T}^T$$

$$\begin{bmatrix} I'_{xx} & -D'_{xy} & -D'_{xz} \\ -D'_{xy} & I'_{yy} & -D'_{yz} \\ -D'_{xz} & -D'_{yz} & I'_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx} & -D_{xy} & -D_{xz} \\ -D_{xy} & I_{yy} & -D_{yz} \\ -D_{xz} & -D_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11} & t_{21} & t_{31} \\ t_{12} & t_{22} & t_{32} \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} \end{bmatrix}$$

Pro 2D se formulace zjednoduší na

$$\begin{bmatrix} I'_{yy} & -D'_{yz} \\ -D'_{yz} & I'_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma \\ -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{yy} & -D_{yz} \\ -D_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma \\ \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}$$

pak

$$\begin{bmatrix} I'_{yy} & -D'_{yz} \\ -D'_{yz} & I'_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{yy} \cos^2 \gamma + I_{zz} \sin^2 \gamma - D_{yz} \sin 2\gamma & \frac{I_{zz}-I_{yy}}{2} \sin 2\gamma - D_{yz} \cos 2\gamma \\ \frac{I_{zz}-I_{yy}}{2} \sin 2\gamma - D_{yz} \cos 2\gamma & I_{yy} \sin^2 \gamma + I_{zz} \cos^2 \gamma + D_{yz} \sin 2\gamma \end{bmatrix}$$

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY – POLOMĚR SETRVAČNOSTI

Získáme tak 3 rovnice:

$$I'_{yy} = I_{yy} \cos^2 \gamma + I_{zz} \sin^2 \gamma - D_{yz} \sin 2\gamma$$

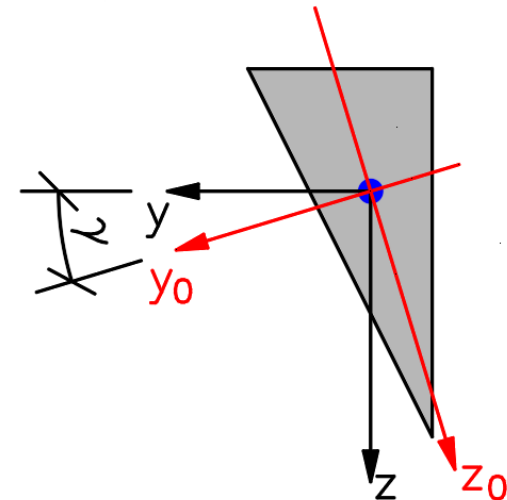
$$I'_{zz} = I_{yy} \sin^2 \gamma + I_{zz} \cos^2 \gamma + D_{yz} \sin 2\gamma$$

$$-D'_{yz} = \frac{I_{zz} - I_{yy}}{2} \sin 2\gamma - D_{yz} \cos 2\gamma$$

Pro nalezení hlavních momentů setrvačnosti určíme $D'_{yz} = 0$. Pootočení souřadnicového systému o úhel γ_0 se pak určí jako

$$0 = \frac{I_{zz} - I_{yy}}{2} \sin 2\gamma_0 - D_{yz} \cos 2\gamma_0$$

$$\operatorname{tg} 2\gamma_0 = \frac{2D_{yz}}{I_{zz} - I_{yy}}$$



PRŮŘEZOVÉ VELIČINY – POLOMĚR SETRVAČNOSTI

Získáme tak 3 rovnice:

$$I'_{yy} = I_{yy} \cos^2 \gamma + I_{zz} \sin^2 \gamma - D_{yz} \sin 2\gamma$$

$$I'_{zz} = I_{yy} \sin^2 \gamma + I_{zz} \cos^2 \gamma + D_{yz} \sin 2\gamma$$

$$-D'_{yz} = \frac{I_{zz} - I_{yy}}{2} \sin 2\gamma - D_{yz} \cos 2\gamma$$

Pro nalezení hlavních momentů setrvačnosti určíme $D'_{yz} = 0$. Pootočení souřadnicového systému o úhel γ_0 se pak určí jako

$$0 = \frac{I_{zz} - I_{yy}}{2} \sin 2\gamma_0 - D_{yz} \cos 2\gamma_0$$

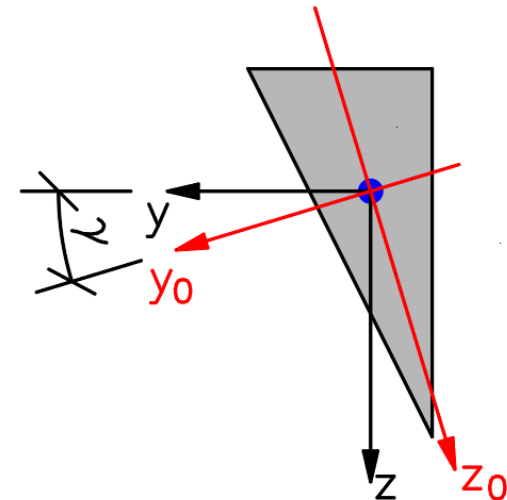
$$\operatorname{tg} 2\gamma_0 = \frac{2D_{yz}}{I_{zz} - I_{yy}}$$

Pokud vycházíme ze základní souřadnicové soustavy, pro kterou platí $I_{ii} \neq 0, I_{ij} = 0$, můžeme výše uvedené rovnice upravit na:

$$I'_{yy} = I_{yy,0} \cos^2 \gamma + I_{zz,0} \sin^2 \gamma$$

$$I'_{zz} = I_{yy,0} \sin^2 \gamma + I_{zz,0} \cos^2 \gamma$$

$$D'_{yz} = \frac{I_{yy,0} - I_{zz,0}}{2} \sin 2\gamma$$



PRŮŘEZOVÉ VELIČINY – POLOMĚŘ SETRVAČNOSTI

Získáme tak 3 rovnice:

$$I'_{yy} = I_{yy} \cos^2 \gamma + I_{zz} \sin^2 \gamma - D_{yz} \sin 2\gamma$$

$$I'_{zz} = I_{yy} \sin^2 \gamma + I_{zz} \cos^2 \gamma + D_{yz} \sin 2\gamma$$

$$-D'_{yz} = \frac{I_{zz} - I_{yy}}{2} \sin 2\gamma - D_{yz} \cos 2\gamma$$

Pro nalezení hlavních momentů setrvačnosti určíme $D'_{yz} = 0$. Pootočení souřadnicového systému o úhel γ_0 se pak určí jako

$$0 = \frac{I_{zz} - I_{yy}}{2} \sin 2\gamma_0 - D_{yz} \cos 2\gamma_0$$

$$\operatorname{tg} 2\gamma_0 = \frac{2D_{yz}}{I_{zz} - I_{yy}}$$

Pokud vycházíme ze základní souřadnicové soustavy, pro kterou platí $I_{ii} \neq 0, I_{ij} = 0$, můžeme výše uvedené rovnice upravit na:

$$I'_{yy} = I_{yy,0} \cos^2 \gamma + I_{zz,0} \sin^2 \gamma$$

$$I'_{zz} = I_{yy,0} \sin^2 \gamma + I_{zz,0} \cos^2 \gamma$$

$$D'_{yz} = \frac{I_{yy,0} - I_{zz,0}}{2} \sin 2\gamma$$

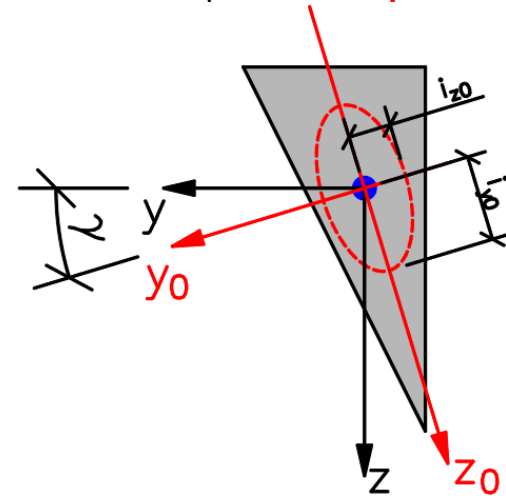
Podělením druhé rovnice plochou A získáme rovnici

$$i'^2_z = i^2_{y,0} \sin^2 \gamma + i^2_{z,0} \cos^2 \gamma \Rightarrow 1 = \frac{i^2_{y,0}}{i'^2_z} \sin^2 \gamma + \frac{i^2_{z,0}}{i'^2_z} \cos^2 \gamma$$

kteřá odpovídá rovnici elipsy. Konstanty

$$i'_z = \sqrt{\frac{I'_{zz}}{A}}, \quad i_{z,0} = \sqrt{\frac{I_{zz,0}}{A}}, \quad i_{y,0} = \sqrt{\frac{I_{yy,0}}{A}}$$

reprezentují tzv. **poloměry setrvačnosti** příslušné **elipse setrvačnosti**.



PRŮŘEZOVÉ VELIČINY – POLOMĚR SETRVAČNOSTI

Získáme tak 3 rovnice:

$$I'_{yy} = I_{yy} \cos^2 \gamma + I_{zz} \sin^2 \gamma - D_{yz} \sin 2\gamma$$

$$I'_{zz} = I_{yy} \sin^2 \gamma + I_{zz} \cos^2 \gamma + D_{yz} \sin 2\gamma$$

$$-D'_{yz} = \frac{I_{zz} - I_{yy}}{2} \sin 2\gamma - D_{yz} \cos 2\gamma$$

Pro nalezení hlavních momentů setrvačnosti určíme $D'_{yz} = 0$. Pootočení souřadnicového systému o úhel γ_0 se pak určí jako

$$0 = \frac{I_{zz} - I_{yy}}{2} \sin 2\gamma_0 - D_{yz} \cos 2\gamma_0$$

$$\operatorname{tg} 2\gamma_0 = \frac{2D_{yz}}{I_{zz} - I_{yy}}$$

Pokud vycházíme ze základní souřadnicové soustavy, pro kterou platí $I_{ii} \neq 0, I_{ij} = 0$, můžeme výše uvedené rovnice upravit na:

$$I'_{yy} = I_{yy,0} \cos^2 \gamma + I_{zz,0} \sin^2 \gamma$$

$$I'_{zz} = I_{yy,0} \sin^2 \gamma + I_{zz,0} \cos^2 \gamma$$

$$D'_{yz} = \frac{I_{yy,0} - I_{zz,0}}{2} \sin 2\gamma$$

Podělením druhé rovnice plochou A získáme rovnici

$$i'^2_z = i^2_{y,0} \sin^2 \gamma + i^2_{z,0} \cos^2 \gamma \Rightarrow 1 = \frac{i^2_{y,0}}{i'^2_z} \sin^2 \gamma + \frac{i^2_{z,0}}{i'^2_z} \cos^2 \gamma$$

kteřá odpovídá rovnici elipsy. Konstanty

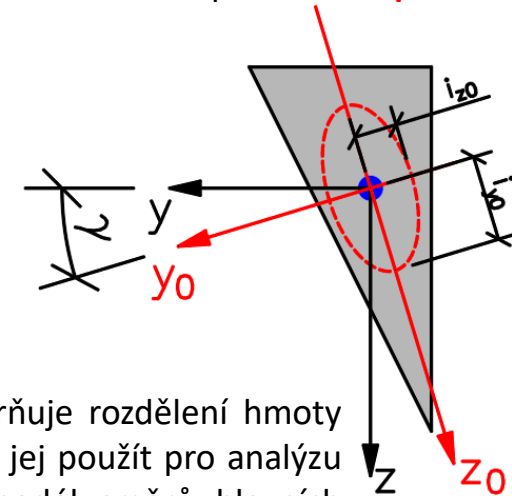
$$i'_z = \sqrt{\frac{I'_{zz}}{A}}, \quad i_{z,0} = \sqrt{\frac{I_{zz,0}}{A}}, \quad i_{y,0} = \sqrt{\frac{I_{yy,0}}{A}}$$

reprezentují tzv. **poloměry setrvačnosti** příslušné **elipse setrvačnosti**.

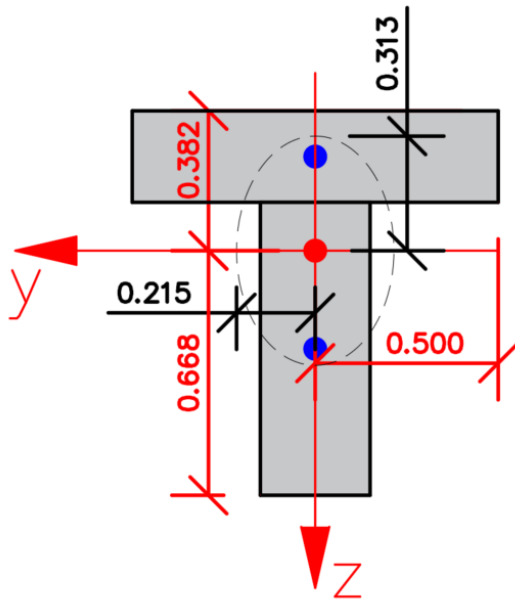
Tvar elipsy setrvačnosti závisí na tvaru průřezu a počátku souřadného systému. Nezávisí na orientaci souřadného systému.

Elipsa setrvačnosti znázorňuje rozdělení hmoty průřezu okolo těžiště. Lze jej použít pro analýzu ohybové tuhosti prvku podél směrů hlavních momentů setrvačnosti.

(Ve směrech hlavních momentů setrvačnosti je konstrukce nejtužší)



PRŮŘEZOVÉ VELIČINY – POLOMĚŘ SETRVAČNOSTI



Plocha:

$$A = 0,49 \text{ m}^2$$

**Momenty setrvačnosti
k souřadnicovým osám:**

$$I_y = 4,79\text{e} - 2 \text{ m}^4$$

$$I_z = 2,26\text{e} - 2 \text{ m}^4$$

$$D_{yz} = 0 \text{ m}^4$$

Pootočení k hlavním momentům setrvačnosti

$$\text{tg } 2\gamma_0 = \frac{2D_{yz}}{I_{zz} - I_{yy}} = \frac{2.0}{(2,26\text{e} - 2) - (4,79\text{e} - 2)} = 0^\circ$$

Hlavní momenty setrvačnosti

$$I_{y,0} = I_y$$

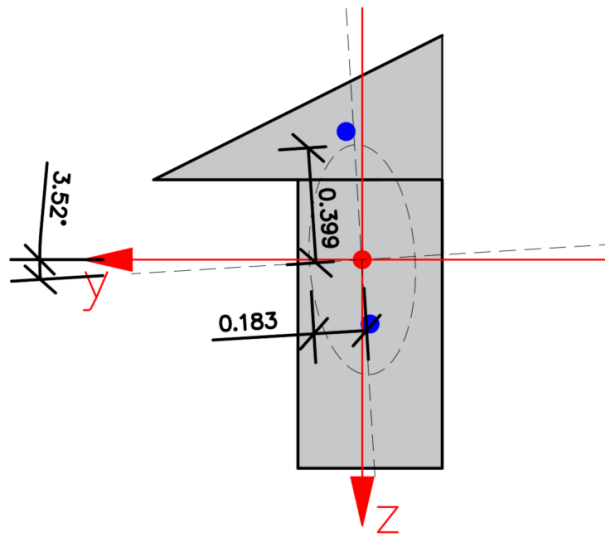
$$I_{z,0} = I_z$$

Poloměry setrvačnosti

$$i_{y,0} = \sqrt{\frac{I_{y,0}}{A}} = \sqrt{\frac{4,79\text{e} - 2}{0,49}} = 0,313 \text{ m}$$

$$i_{z,0} = \sqrt{\frac{I_{z,0}}{A}} = \sqrt{\frac{2,26\text{e} - 2}{0,49}} = 0,215 \text{ m}$$

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY – POLOMĚR SETRVAČNOSTI



Pootočení k hlavním momentům setrvačnosti

$$\operatorname{tg} 2\gamma_0 = \frac{2D_{yz}}{I_{zz} - I_{yy}} = \frac{2 \cdot (-5,79\text{e} - 3)}{(1,19\text{e} - 1) - (2,55\text{e} - 2)} = 3,52^\circ$$

Hlavní momenty setrvačnosti

$$I_{y,0} = I_y \cos^2 \gamma + I_z \sin^2 \gamma - D_{yz} \sin 2\gamma$$

$$I_{y,0} = (1,19\text{e} - 1) \cos^2(3,52) + (2,55\text{e} - 2) \sin^2(3,52) + (5,79\text{e} - 3) \sin(2 \cdot 3,52)$$

$$I_{y,0} = 1,20\text{e} - 1 \text{ m}^4$$

$$I_{z,0} = I_y \sin^2 \gamma + I_z \cos^2 \gamma + D_{yz} \sin 2\gamma$$

$$I_{z,0} = (1,19\text{e} - 1) \sin^2(3,52) + (2,55\text{e} - 2) \cos^2(3,52) - (5,79\text{e} - 3) \sin(2 \cdot 3,52)$$

$$I_{z,0} = 1,83\text{e} - 1 \text{ m}^4$$

Plocha:

$$A = 0,75 \text{ m}^2$$

Momenty setrvačnosti k souřadnicovým osám:

$$I_y = 1,19\text{e} - 1 \text{ m}^4$$

$$I_z = 2,55\text{e} - 2 \text{ m}^4$$

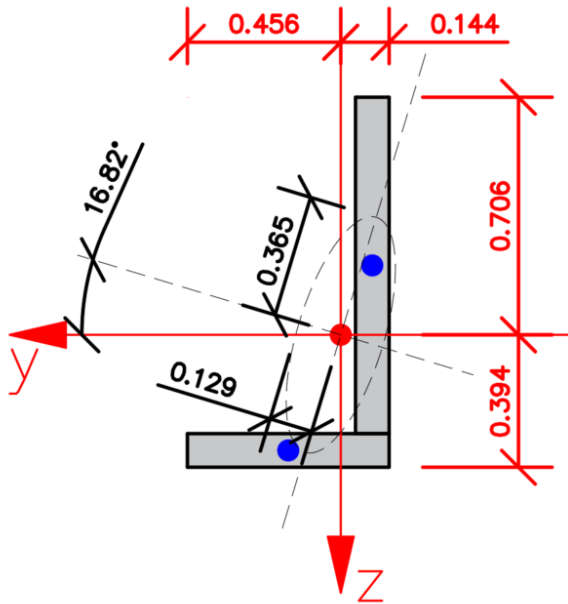
$$D_{yz} = -5,79\text{e} - 3 \text{ m}^4$$

Poloměry setrvačnosti

$$i_{y,0} = \sqrt{\frac{I_{y,0}}{A}} = \sqrt{\frac{1,20\text{e} - 1}{0,75}} = 0,399 \text{ m}$$

$$i_{z,0} = \sqrt{\frac{I_{z,0}}{A}} = \sqrt{\frac{1,83\text{e} - 1}{0,75}} = 0,183 \text{ m}$$

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY – POLOMĚR SETRVAČNOSTI



Pootočení k hlavním momentům setrvačnosti

$$\operatorname{tg} 2\gamma_0 = \frac{2D_{yz}}{I_{zz} - I_{yy}} = \frac{2 \cdot (5,16e - 3)}{(4,23e - 3) - (1,97e - 2)} = -16,82^\circ$$

Hlavní momenty setrvačnosti

$$I_{y,0} = I_y \cos^2 \gamma + I_z \sin^2 \gamma - D_{yz} \sin 2\gamma$$

$$I_{y,0} = (1,97e - 2) \cos^2(-16,82) + (4,23e - 3) \sin^2(-16,82) - (5,16e - 3) \sin(-2 \cdot 16,82) = 2,13e - 2 \text{ m}^4$$

$$I_{z,0} = I_y \sin^2 \gamma + I_z \cos^2 \gamma + D_{yz} \sin 2\gamma$$

$$I_{z,0} = (1,97e - 2) \sin^2(-16,82) + (4,23e - 3) \cos^2(-16,82) + (5,16e - 3) \sin(-2 \cdot 16,82) = 2,67e - 3 \text{ m}^4$$

Plocha:

$$A = 0,16 \text{ m}^2$$

**Momenty setrvačnosti
k souřadnicovým osám:**

$$I_y = 1,97e - 2 \text{ m}^4$$

$$I_z = 4,23e - 3 \text{ m}^4$$

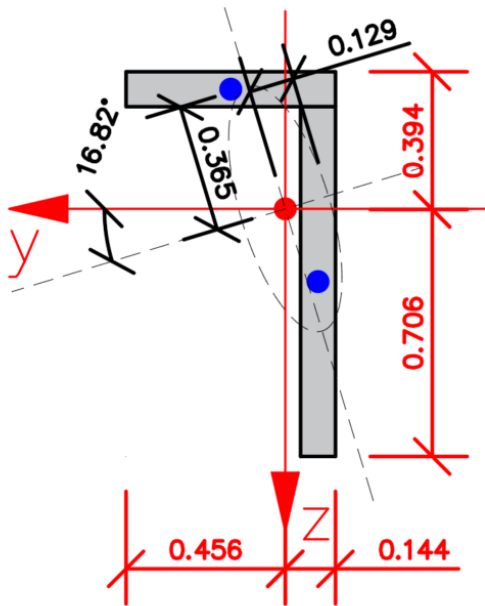
$$D_{yz} = 5,16e - 3 \text{ m}^4$$

Poloměry setrvačnosti

$$i_{y,0} = \sqrt{\frac{I_{y,0}}{A}} = \sqrt{\frac{2,13e - 2}{0,16}} = 0,365 \text{ m}$$

$$i_{z,0} = \sqrt{\frac{I_{z,0}}{A}} = \sqrt{\frac{2,67e - 3}{0,16}} = 0,129 \text{ m}$$

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY – POLOMĚR SETRVAČNOSTI



Plocha:

$$A = 0,16 \text{ m}^2$$

**Momenty setrvačnosti
k souřadnicovému osám:**

$$I_y = 1,97e - 2 \text{ m}^4$$

$$I_z = 4,23e - 3 \text{ m}^4$$

$$D_{yz} = -5,16e - 3 \text{ m}^4$$

Pootočení k hlavním momentům setrvačnosti

$$\operatorname{tg} 2\gamma_0 = \frac{2D_{yz}}{I_{zz} - I_{yy}} = \frac{-2 \cdot (5,16e - 3)}{(4,23e - 3) - (1,97e - 2)} = 16,82^\circ$$

Hlavní momenty setrvačnosti

$$I_{y,0} = I_y \cos^2 \gamma + I_z \sin^2 \gamma - D_{yz} \sin 2\gamma$$

$$I_{y,0} = (1,97e - 2) \cos^2(16,82) + (4,23e - 3) \sin^2(16,82) + (5,16e - 3) \sin(2 \cdot 16,82) = 2,13e - 2 \text{ m}^4$$

$$I_{z,0} = I_y \sin^2 \gamma + I_z \cos^2 \gamma + D_{yz} \sin 2\gamma$$

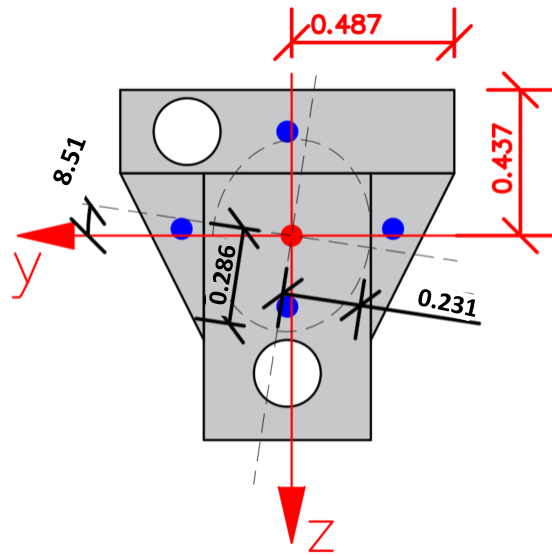
$$I_{z,0} = (1,97e - 2) \sin^2(16,82) + (4,23e - 3) \cos^2(16,82) - (5,16e - 3) \sin(2 \cdot 16,82) = 2,67e - 3 \text{ m}^4$$

Poloměry setrvačnosti

$$i_{y,0} = \sqrt{\frac{I_{y,0}}{A}} = \sqrt{\frac{2,13e - 2}{0,16}} = 0,365 \text{ m}$$

$$i_{z,0} = \sqrt{\frac{I_{z,0}}{A}} = \sqrt{\frac{2,67e - 3}{0,16}} = 0,129 \text{ m}$$

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY – POLOMĚR SETRVAČNOSTI



Pootočení k hlavním momentům setrvačnosti

$$\operatorname{tg} 2\gamma_0 = \frac{2D_{yz}}{I_{zz} - I_{yy}} = \frac{2 \cdot (3,03e - 3)}{(3,98e - 2) - (5,91e - 2)} = -8,51^\circ$$

Hlavní momenty setrvačnosti

$$I_{y,0} = I_y \cos^2 \gamma + I_z \sin^2 \gamma - D_{yz} \sin 2\gamma$$

$$I_{y,0} = (5,79e - 2) \cos^2(-8,51) + (3,85e - 2) \sin^2(-8,51) - (2,96e - 3) \sin(-2 \cdot 8,51) = 5,83e - 2 \text{ m}^4$$

$$I_{z,0} = I_y \sin^2 \gamma + I_z \cos^2 \gamma + D_{yz} \sin 2\gamma$$

$$I_{z,0} = (5,79e - 2) \sin^2(-8,51) + (3,85e - 2) \cos^2(-8,51) + (2,96e - 3) \sin(-2 \cdot 8,51) = 3,81e - 2 \text{ m}^4$$

Plocha:

$$A = 0,712 \text{ m}^2$$

Momenty setrvačnosti k souřadnicovým osám:

$$I_y = 5,79e - 2 \text{ m}^4$$

$$I_z = 3,85e - 2 \text{ m}^4$$

$$D_{yz} = 2,96e - 3 \text{ m}^4$$

Poloměry setrvačnosti

$$i_{y,0} = \sqrt{\frac{I_{y,0}}{A}} = \sqrt{\frac{5,83e - 2}{0,712}} = 0,286 \text{ m}$$

$$i_{z,0} = \sqrt{\frac{I_{z,0}}{A}} = \sqrt{\frac{3,81e - 2}{0,712}} = 0,231 \text{ m}$$

PRŮŘEZOVÉ VELIČINY

Statický moment

$$S_{xy} = \int_A z \, dA, \quad S_{xz} = \int_A y \, dA$$

Moment setrvačnosti

$$I_y = \int_A z^2 \, dA, \quad I_z = \int_A y^2 \, dA$$

Deviační moment

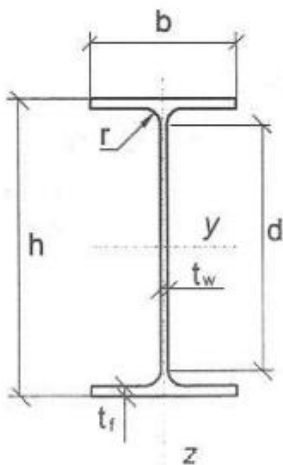
$$D_{yz} = \int_A yz \, dA$$

Poloměr setrvačnosti

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}, \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$$

Průřezový modul

$$W_y = \frac{I_y}{z}, \quad W_z = \frac{I_z}{y}$$



	Hmotnost	Rozměry							Průřezové veličiny					
	G kg/m	h mm	b mm	t _w mm	t _f mm	r ₁ mm	d mm	A mm ²	A _m m ² /m	I _y mm ⁴	W _y mm ³	W _{pl,y} mm ³	i _y mm	
Násobitel								10 ³		10 ⁸	10 ³	10 ³		
IPE 80	6,00	80	46	3,8	5,2	5,0	59,6	0,764	0,328	0,8014	20,0	23,22	32,4	
IPE 100	8,10	100	55	4,1	5,7	7,0	74,6	1,032	0,400	1,710	34,2	39,41	40,7	
IPE 120	10,4	120	64	4,4	6,3	7,0	93,4	1,321	0,475	3,178	53,0	60,73	49,0	
IPE 140	12,9	140	73	4,7	6,9	7,0	112,2	1,643	0,551	5,412	77,3	88,34	57,4	
IPE 160	15,8	160	82	5,0	7,4	9,0	127,2	2,009	0,623	8,693	109	123,9	65,8	
IPE 180	18,8	180	91	5,3	8,0	9,0	146,0	2,395	0,698	13,17	146	166,4	74,2	
IPE 200	22,4	200	100	5,6	8,5	12,0	159,0	2,848	0,768	19,43	194	220,6	82,6	
IPE 220	26,2	220	110	5,9	9,2	12,0	177,6	3,337	0,848	27,72	252	285,4	91,1	
IPE 240	30,7	240	120	6,2	9,8	15,0	190,4	3,912	0,922	38,92	324	366,6	99,7	
IPE 270	36,1	270	135	6,6	10,2	15,0	219,6	4,594	1,041	57,90	429	484,0	112,3	
IPE 300	42,2	300	150	7,1	10,7	15,0	248,6	5,381	1,160	83,56	557	628,4	124,6	
IPE 330	49,1	330	160	7,5	11,5	18,0	271,0	6,261	1,254	117,7	713	804,3	137,1	
IPE 360	57,1	360	170	8,0	12,7	18,0	298,6	7,273	1,353	162,7	904	1019	149,6	
IPE 400	66,3	400	180	8,6	13,5	21,0	331,0	8,446	1,467	231,3	1157	1307	165,5	
IPE 450	77,6	450	190	9,4	14,6	21,0	378,8	9,882	1,605	337,4	1500	1702	184,8	
IPE 500	90,7	500	200	10,2	16,0	21,0	426,0	11,55	1,744	482,0	1930	2194	204,3	
IPE 550	105,5	550	210	11,1	17,2	24,0	467,6	13,44	1,877	671,2	2440	2787	223,5	
IPE 600	122,5	600	220	12,0	19,0	24,0	514,0	15,60	2,015	920,8	3070	3512	243,0	