



PŘÍRODOVĚDECKÁ
FAKULTA
Univerzita Karlova

Matematika pro geoinformatiky

Filip Konopka

Studijní text k přednášce
MZ370G03

ZS 2021/22

Obsah

1	Zobrazení	2
1.0.1	Příklady k procvičení - afinní zobrazení	12
1.0.2	Příklady k procvičení - parametrizace křivek	13
2	Diferenciální počet	19
2.1	Diferenciální počet funkce jedné proměnné	19
2.1.1	Taylorův polynom	28
2.2	Diferenciální počet funkcí více proměnných	32
2.2.1	Taylorův polynom	39
2.2.2	Derivace ve směru	42
2.2.3	Příklady k procvičení	45
3	Lineární a afinní zobrazení	46
3.1	Lineární zobrazení	46
3.2	Afinní zobrazení	50
3.2.1	Shodná zobrazení	51
3.2.2	Podobná zobrazení	56
3.2.3	Geometrický význam determinantu	58
3.2.4	Příklady k procvičení	62
3.3	Vlastní čísla a vlastní vektory	65
4	Dodatky	68
4.1	Odvození některých základních vzorců	68
4.1.1	Algebraické vzorce	68
4.1.2	Goniometrické vzorce	72

1. Zobrazení

Uveďme na úvod několik příkladů zobrazení, kterými se budeme v tomto kurzu zabývat.

Úmluva. Zápisem

$$f : M \rightarrow N$$

budeme rozumět, že f je zobrazení z množiny M do množiny N , přičemž $D_f \subseteq M$ a $H_f \subseteq N$ (tj. definiční obor f je podmnožinou množiny M a obor hodnot f je podmnožinou množiny N).

- Zobrazení $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ přiřazuje reálnému číslu x reálné číslo $f(x)$, tedy jde o funkci jedné proměnné.

Příklady:

- Taxikář si účtuje 25 Kč za kilometr jízdy a vstupní poplatek 100 Kč. Celková cena, kterou zaplatíme je tedy funkcí ujeté vzdálenosti x (v km) a tato funkce má předpis

$$f(x) = 25x + 100.$$

Řekneme, že cena závisí na vzdálenosti lineárně - jde tedy o **lineární funkci**. Definiční obor této funkce je $D_f = [0, +\infty)$ a její obor hodnot je $H_f = [100, +\infty)$. *V tomto případě tedy lze na funkci f pohlížet jako na zobrazení přiřazující reálnému číslu x (reprezentujícímu ujetou vzdálenost) číslo $25x + 100$ (reprezentující cenu, kterou zaplatíme taxikáři) a psát $x \xrightarrow{f} 25x + 100$.*

- Obsah čtverce S o straně a závisí na délce své strany kvadraticky - jde tedy o **kvadratickou funkci**

$$S(a) = a^2.$$

- Dráha s , kterou urazí hmotný bod při rovnoměrně zrychleném pohybu se zrychlením a a počáteční rychlosti v_0 závisí na čase kvadraticky a tato funkce má předpis

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t.$$

- Zobrazení $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ přiřazuje dvojici reálných čísel (x, y) reálné číslo $f(x, y)$, tedy jde o funkci dvou proměnných.

Příklady:

- Zobrazení přiřazující bodu roviny $[x, y]$ jeho vzdálenost od počátku souřadnicového systému je funkce

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2},$$

což přímo plyne z Pythagorovy věty.

- Obsah obdélníku S je funkcí délek svých stran a, b a tato funkce má předpis

$$S(a, b) = ab.$$

- Zobrazení $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ přiřazuje dvojici reálných čísel (x, y) dvojici reálných čísel (x', y') , tedy jde o zobrazení z roviny do roviny. My se budeme zabývat především zobrazeními ve tvaru

$$L(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{u}, \quad (1.1)$$

kde A je čtvercová matice řádu 2 s reálnými prvky (píšeme $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$), $\vec{u} = (u_1, u_2)^T$ je vektor posunutí a $\vec{x} = (x, y)^T$. Taková zobrazení nazýváme **afinní**. V případě, že $\vec{u}$ je nulový vektor, jde o lineární zobrazení. Rovnici (1.1) lze tedy přepsat maticovým zápisem:

$$L(x, y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Je-li (x, y) vektor a (x', y') jeho obraz při zobrazení L , tedy $L(x, y) = (x', y')$, pak rovnici (1.1) můžeme přepsat skalárně:

$$x' = ax + by + u_1$$

$$y' = cx + dy + u_2$$

Příklady:

- Posunutí, otočení, osová souměrnost a jakékoliv jejich složení je shodné zobrazení z roviny do roviny. Řekneme, že zobrazení $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dané vztahem (1.1) je **shodnost**, pokud matice A splňuje

$$A^T A = A A^T = I,$$

kde I značí jednotkovou matici a A^T matici transponovanou. Matice splňující tuto podmínku nazýváme **ortogonální**.

- Připustíme-li navíc, že můžeme objekt libovolně zvětšovat či zmenšovat, jde o podobné zobrazení. Řekneme, že zobrazení $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dané vztahem (1.1) je **podobnost**, pokud existuje nenulové číslo k tak, že matice A splňuje

$$A^T A = A A^T = k^2 I.$$

Kupříkladu stejnoolehlost s koeficientem k je podobnost.

- Připustíme-li navíc zkosení či projekci a jejich libovolné složení s jakoukoliv podobností, jde o afinitu. Řekneme, že zobrazení $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dané vztahem (1.1) je **afinita**, je-li matice A **regulární**.¹

¹Řekneme, že čtvercová matice A je **regulární**, pokud $\det A \neq 0$. V opačném případě ji nazýváme **singulární**.

- Zobrazení $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ přiřazuje číslu dvousložkový vektor. Je-li $I \subseteq \mathbb{R}$ interval, $t \in I$ parametr a $f_1, f_2: I \rightarrow \mathbb{R}$ jsou spojité funkce, pak zobrazení

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t))$$

je **parametrizovaná rovinná křivka**.

– Zobrazení

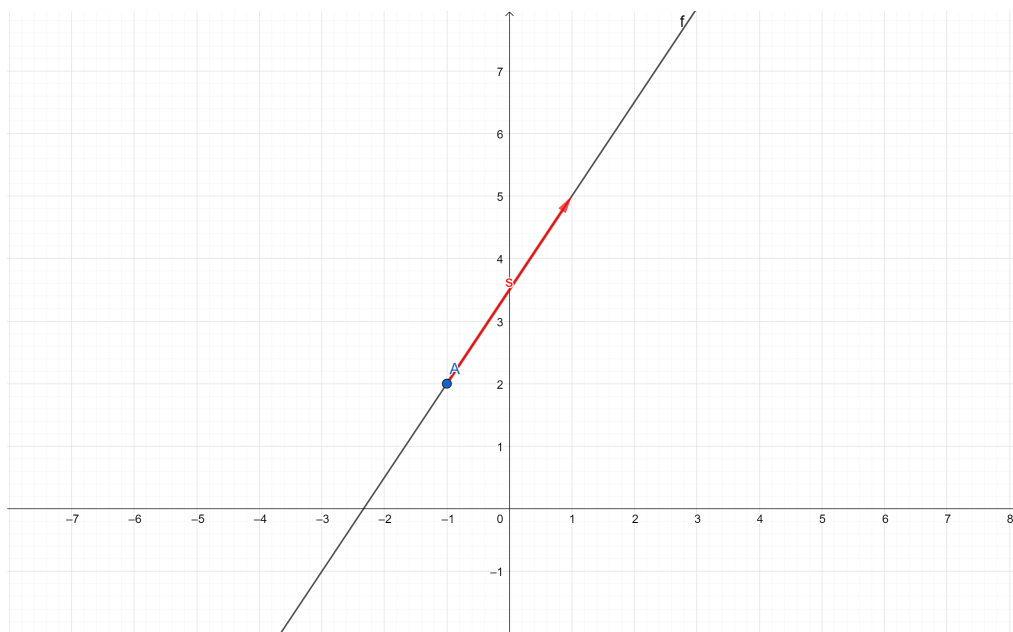
$$f(t) = (-1 + 2t, 2 + 3t), t \in \mathbb{R}$$

je parametrizace přímky procházející bodem $A = [-1; 2]$ se směrovým vektorem $\vec{s} = (2, 3)$. Na střední škole jsme byli zvyklí zapisovat parametrickou rovnici přímky skalárními rovnicemi, tedy v tomto případě:

$$x = -1 + 2t$$

$$y = 2 + 3t,$$

kde $t \in \mathbb{R}$ je parametr.



²Připomeňme si, jak převést parametrickou rovnici přímky na obecnou rovnici. Chceme se zbavit parametru t , proto vynásobme první rovnici třemi a druhou rovnici minus dvěma, tedy

$$3x = -3 + 6t$$

$$-2y = -4 - 6t$$

a nyní tyto rovnice sečteme, tj.

$$3x - 2y = -7 + 0t$$

Rovnici

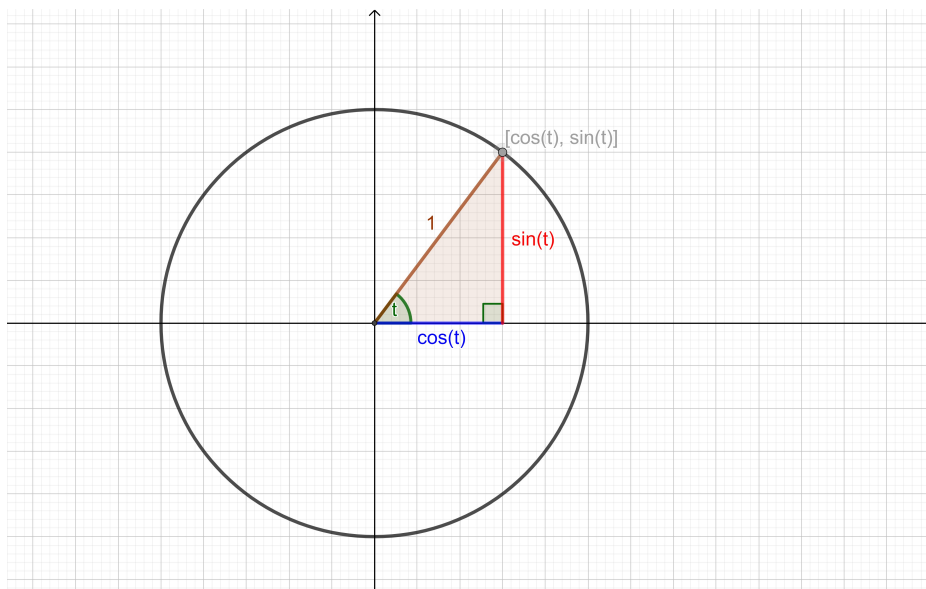
$$3x - 2y + 7 = 0$$

nazýváme obecnou rovnici této přímky a umíme z ní vyčíst její normálový vektor $\vec{n} = (3, -2)$, který je kolmý na směrový vektor. (tzn. jejich skalární součin je nulový, $\vec{n} \cdot \vec{s} = 0$)

– Zobrazení

$$f(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi)$$

je parametrizace kružnice o poloměru 1 se středem v počátku souřadnicového systému. To by nás nemělo překvapit, protože *funkce sinus je definována jako y-ová souřadnice bodu ležícího na jednotkové kružnici a funkce kosinus jako jeho x-ová souřadnice*. Říkáme, že funkce sinus a kosinus parametrizují jednotkovou kružnici.



Poznamenejme ještě, že pokud v tomto pravoúhlém trojúhelníku přepíšeme Pythagorovu větu, získáme pro libovolné $t \in \mathbb{R}$ vztah

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1, \quad (1.2)$$

který známe jako "vzoreček" a při úpravě goniometrických výrazů jej používáme dnes a denně.

³Na základní škole jsme si zaváděli funkce sinus a kosinus v pravoúhlém trojúhelníku. Bylo nám řečeno, že funkce sinus je definována v pravoúhlém trojúhelníku jako **podíl protilehlé odvěsny** (k danému úhlu) **a přepony**; a funkce kosinus je v pravoúhlém trojúhelníku definována jako **podíl přilehlé odvěsny a přepony**. S touto definicí jsme si vystačili. Rozmyslete si, že tato "nová" středoškolská definice je obecnější než ta ze základní školy a že v 1. kvadrantu jsou skutečně ekvivalentní.

⁴Podobně jako jsme se učili vyjádřit z parametrické rovnice přímky její obecnou rovnici eliminací parametru (tj. tím, že jsme se ho zbavili), můžeme parametrickou rovnici kružnice převést na její obecnou rovnici. Rovnice

$$x = \cos t$$

$$y = \sin t$$

umocníme na druhou a získáme

$$x^2 = \cos^2 t$$

$$y^2 = \sin^2 t.$$

Sečtením těchto rovnic a využitím vztahu (1.2) získáme

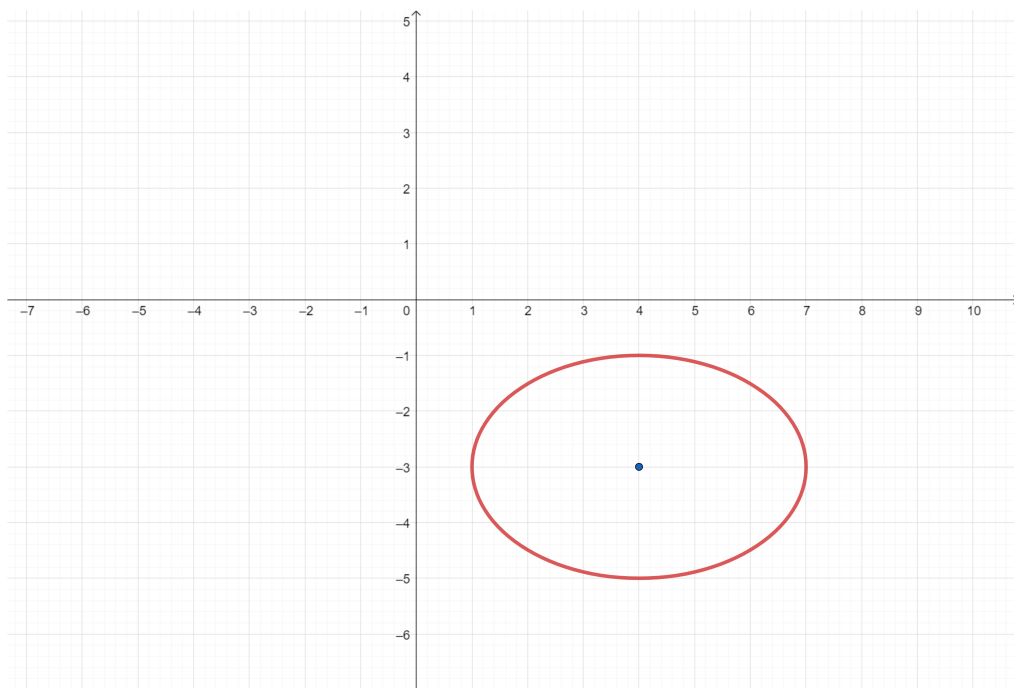
$$x^2 + y^2 = 1,$$

což je obecná (resp. středová) rovnice kružnice o poloměru 1 se středem v $[0,0]$.

– Zobrazení

$$f(t) = (4 + 3 \cos t, -3 + 2 \sin t), t \in [0, 2\pi)$$

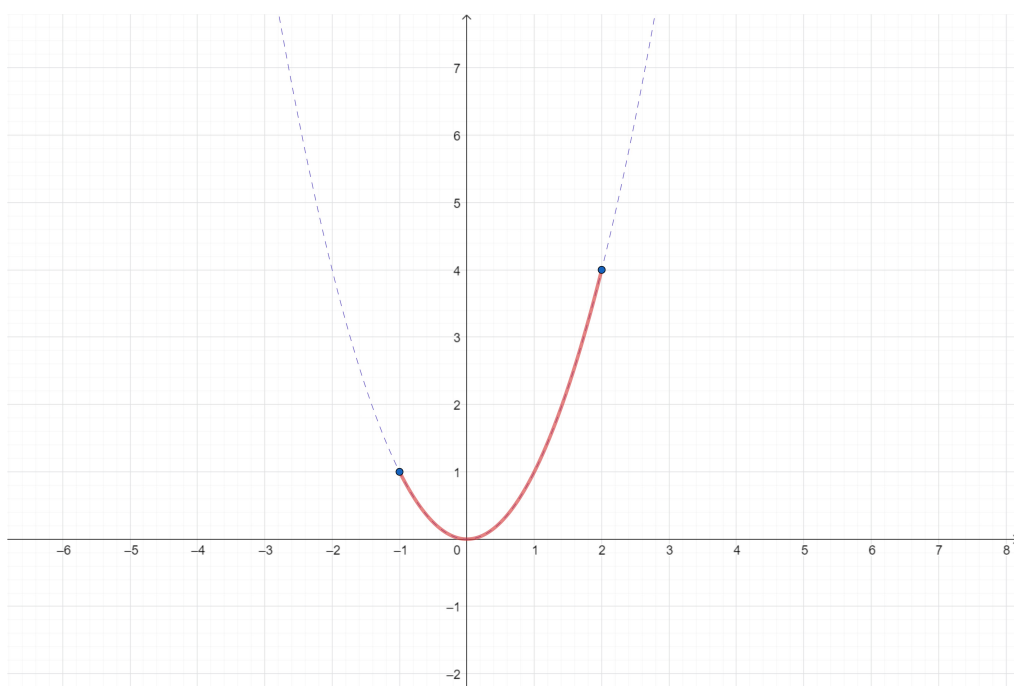
je parametrizace elipsy se středem v bodě $[4; -3]$ a délkou hlavní poloosy 3 a vedlejší poloosy 2.



– Zobrazení

$$f(t) = (t, t^2), t \in [-1, 2]$$

je parametrizace části paraboly $y = x^2$ s počátečním bodem $[-1; 1]$ a koncovým bodem $[2; 4]$.



- Zobrazení $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ přiřazuje číslu tříložkový vektor. Je-li $I \subseteq \mathbb{R}$ interval, $t \in I$ parametr a $f_1, f_2, f_3: I \rightarrow \mathbb{R}$ jsou spojité funkce, pak zobrazení

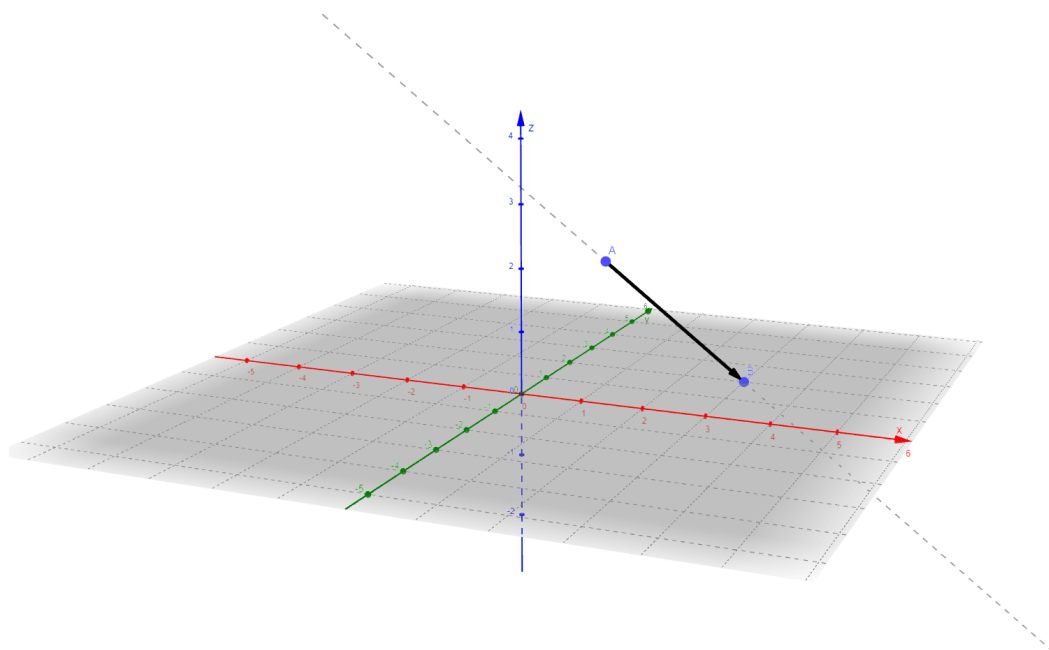
$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)) \quad (1.3)$$

je **parametrizovaná prostorová křivka**.

– Zobrazení

$$f(t) = (1 + 2t, 1 + t, 2 - 2t), t \in [0, 1]$$

je parametrizace úsečky s počátečním bodem $A = [1; 1; 2]$ a směrovým vektorem $\vec{s} = (2; 1; -2)$.



Koncový bod B této úsečky určíme tak, že do bodu A umístíme vektor $\vec{s}$, tedy

$$B = A + \vec{s} = [1, 1, 2] + (2; 1; -2) = [3, 2, 0]$$

⁵Zobrazení (1.3) můžeme chápat jako vektorovou funkci udávající polohu pohybujícího se hmotného bodu v čase t .

⁶Na střední škole jsme se naučili, jak vyjádřit přímku v rovině analyticky - obecnou, směrníkovou i parametrickou rovnicí přímky. Tedy přímku v rovině můžeme zapsat jednou z těchto tří rovnic podle toho, která se nám zrovna hodí. Přímku v prostoru však umíme vyjádřit pouze parametrickými rovnicemi. V tomto konkrétním případě bychom tedy přímku procházející bodem $A = [1; 1; 2]$ se směrovým vektorem $(2; 1; -2)$ zapsali parametrickými rovnicemi:

$$x = 1 + 2t$$

$$y = 1 + t$$

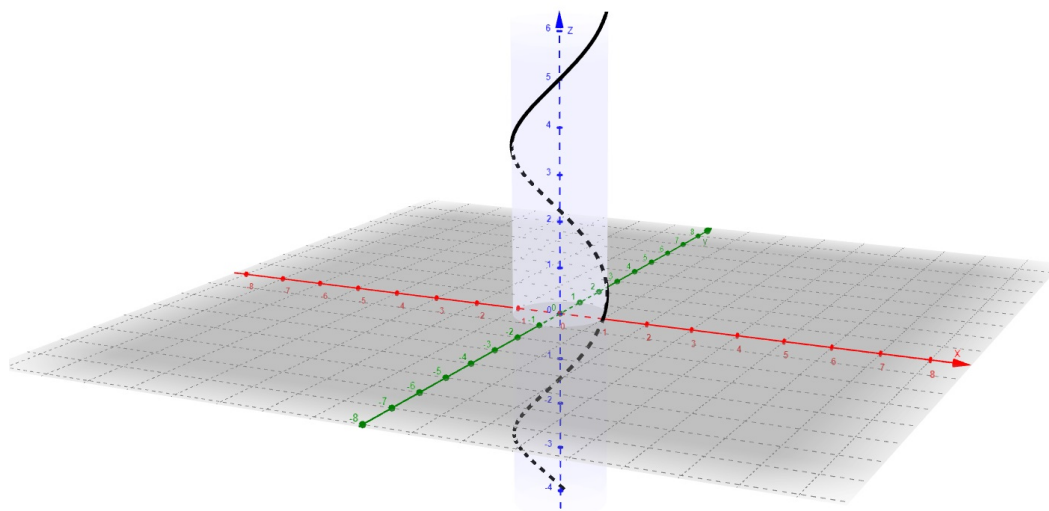
$$z = 2 - t,$$

kde $t \in \mathbb{R}$ je parametr.

– Zobrazení

$$f(t) = (\cos t, \sin t, t), t \in \mathbb{R}$$

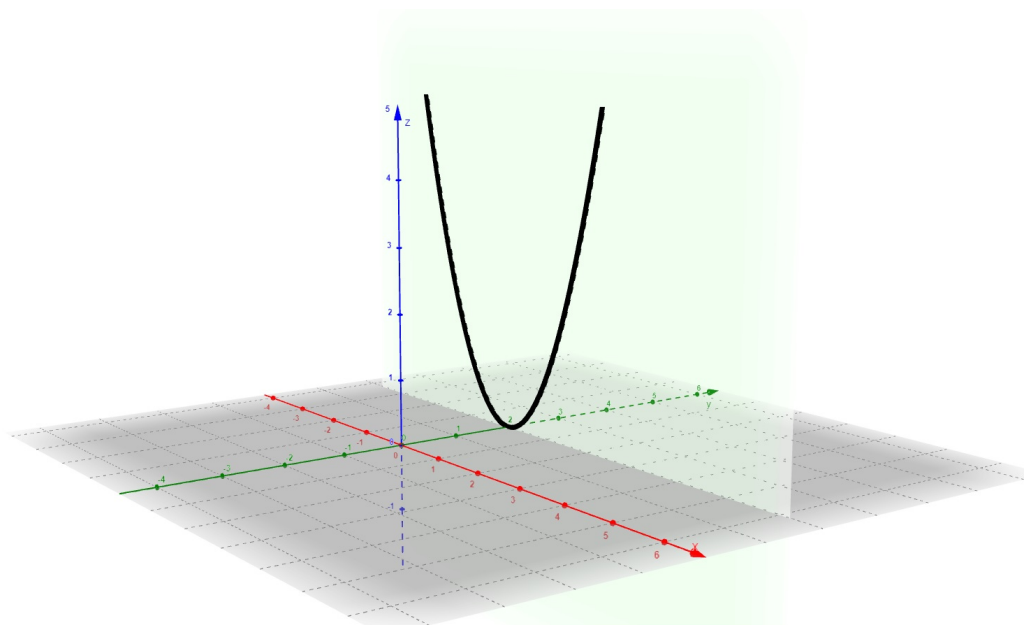
je parametrizace prostorové křivky, jejímž obrazem je spirála, která "obklopuje" válec $x^2 + y^2 = 1$ (tj. válec o nekonečné výšce, jehož podstavou je kružnice se středem v $[0,0]$ a poloměrem 1). Při pohledu "shora" tedy tato křivka vypadá jako kružnice.



– Zobrazení

$$f(t) = (t, 2, t^2), t \in \mathbb{R}$$

je parametrizace paraboly $z = x^2$ ležící v rovině $y = 2$.



- Zobrazení $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ přiřazuje bodu v prostoru bod roviny. Jsou-li f_1, f_2 spojité funkce na nějaké množině $M \subseteq \mathbb{R}^3$, pak má takové zobrazení tvar

$$f(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z)) \quad (1.4)$$

pro $(x, y, z) \in M$. Ve speciálním případě, kdy jsou funkce f_1, f_2 lineární, resp. afinní, jde o zobrazení tvaru

$$f(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{u},$$

kde A je obdélníková matice se třemi sloupci a dvěma řádky, jejíž prvky jsou reálná čísla (píšeme $A \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$) a $\vec{u}$ je vektor posunutí, tedy

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

Příklady:

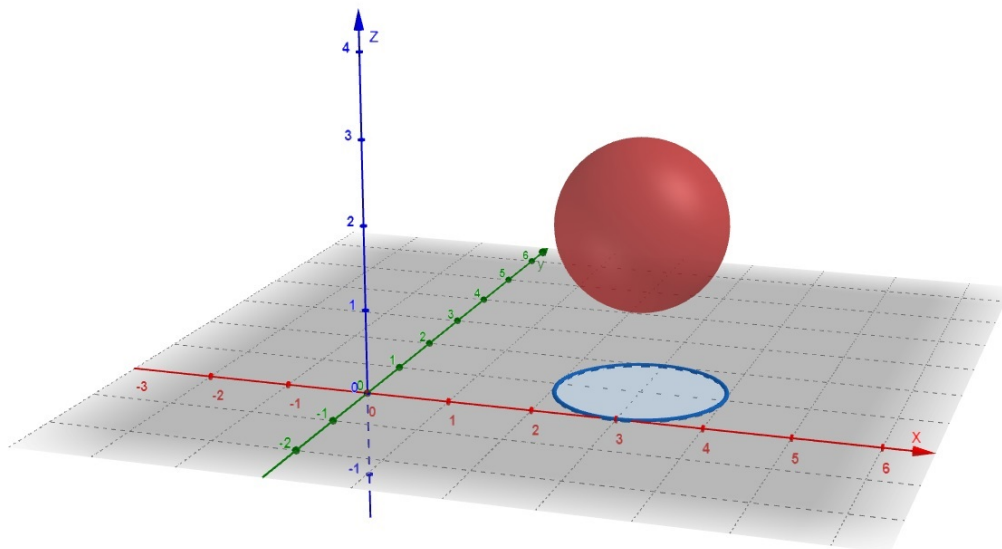
- Projekce z $\mathbb{R}^3$ do roviny $z = 0$ je zobrazení dané předpisem

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

tedy ve tvaru (1.4) jej zapíšeme jako

$$f(x, y, z) = (x, y).$$

Obrazem kulové plochy se středem v bodě $[3, 1, 2]$ a poloměrem 1 při zobrazení f je tedy kruh se středem v bodě $[3, 1]$ a poloměrem 1 ležící v rovině $z = 0$.



Přesněji, obrazem množiny

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 1\}$$

při zobrazení f je množina

$$N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x - 3)^2 + (y - 1)^2 \leq 1\}.$$

– Zobrazení $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dané předpisem $f(x, y, z) = (3x, 2y + 1)$ neboli

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

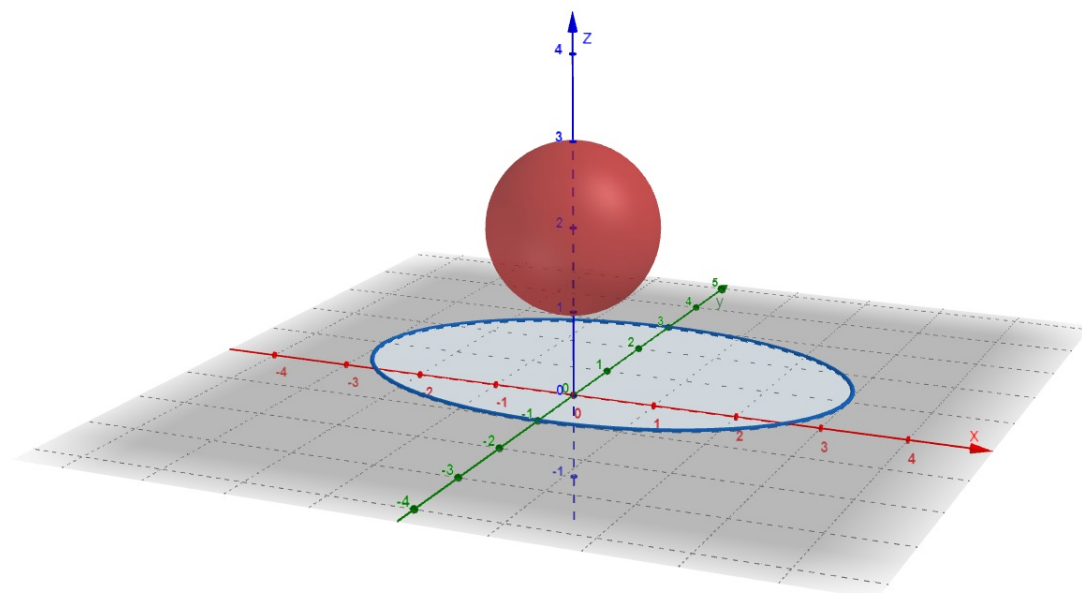
projektuje třírozměrný objekt do roviny $z = 0$ a následně tento rovinný útvar třikrát "protáhne" v ose x a dvakrát v ose y a nakonec jej posune o 1 "nahoru" po ose y . Obrazem kulové plochy

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 1\}$$

při tomto zobrazení je tedy elipsa

$$N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{9} + \frac{(y - 1)^2}{4} \leq 1\}.$$

Píšeme $f(M) = N$.

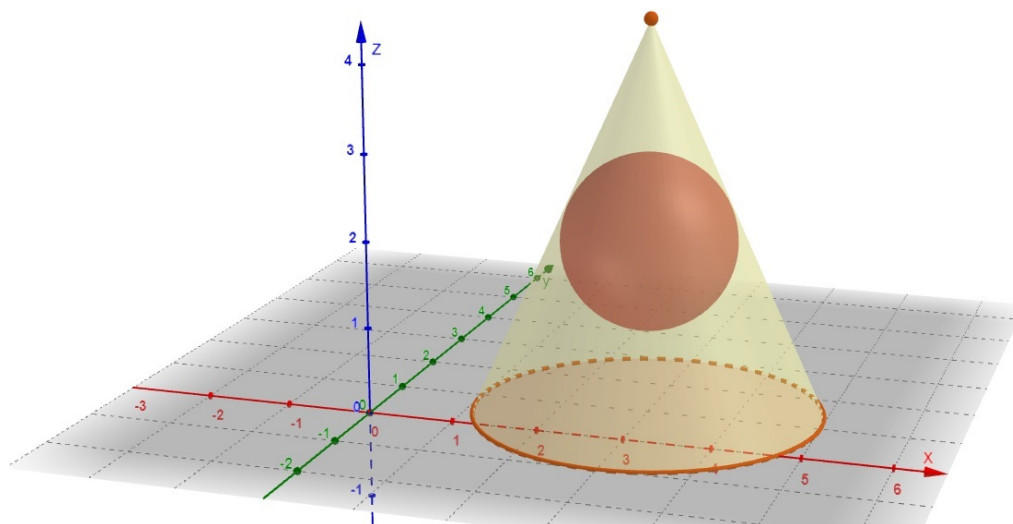


⁷Poznamenejme, že takové zobrazení, které zobrazí tuto kulovou plochu M na elipsu N nemusí být určeno jednoznačně, jelikož na tomto obrázku nejsou vyznačeny konkrétní body reprezentující vzor a obraz. Pokud bychom například nejprve udělali projekci této kulové plochy do roviny $z = 0$, následně bychom tento kruh otočili o libovolný úhel kolem počátku souřadnicového systému a až poté jej třikrát protáhli v ose x a dvakrát protáhli v ose y a na závěr posunuli, získali bychom stejný obraz a přitom by se jednalo o jiné zobrazení. Takže například zobrazení $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dané předpisem

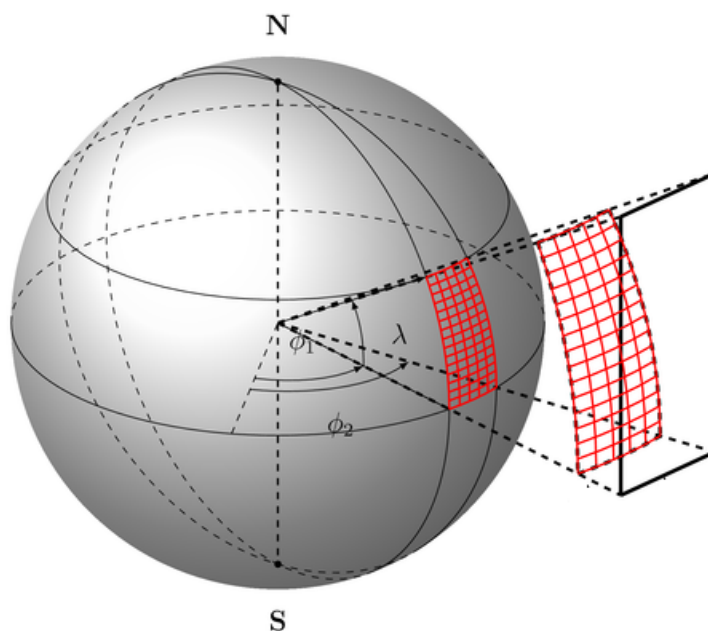
$$g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

kde α je libovolný úhel, také splňuje $g(M) = N$.

- Praktickým příkladem takového zobrazení, které zobrazuje třídimen-
zionální objekt do roviny může být vrhání stínu na rovinu (např. na
zed). Umístíme-li bodový zdroj světla (např. žárovku) přibližně do
bodu $[3; 1; 4,5]$, potom stín této kulové plochy vržený do roviny $z = 0$
bude přibližně kruh se středem v bodě $[3; 1]$ a poloměrem 2.

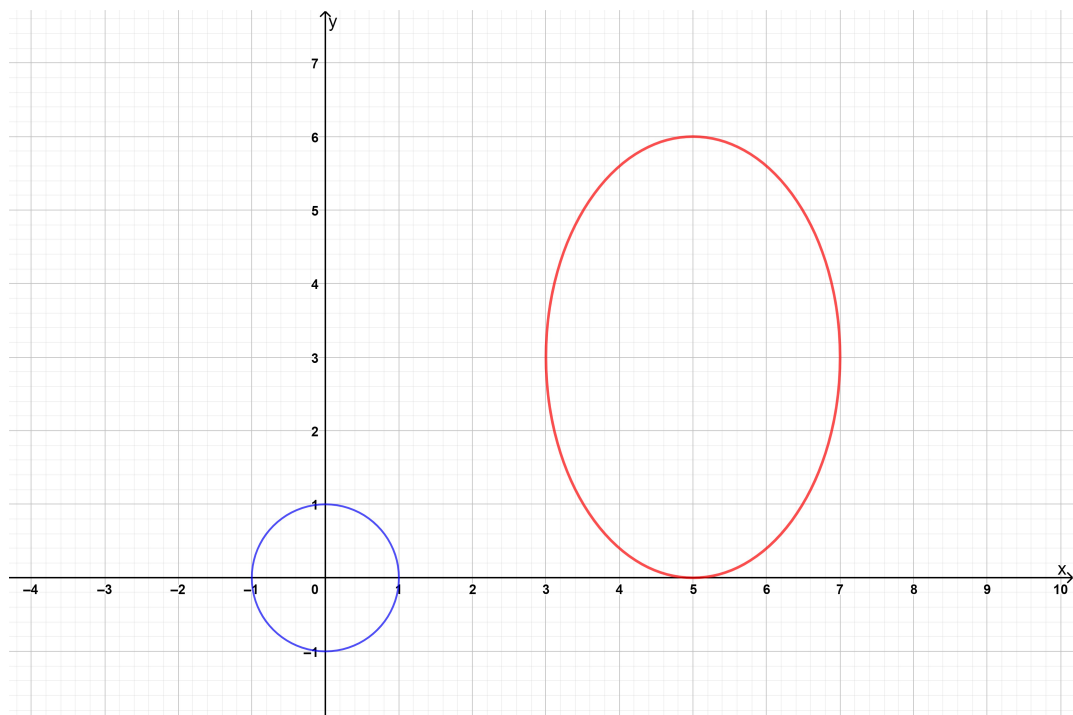


- Jiným příkladem zobrazení z $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^2$ může být zobrazení sféry na
rovinu, tzv. **kartografická projekce**, případně jakékoliv jiné mapové
zobrazení, které zobrazí část sféry (např. Českou republiku) do roviny
reprezentující mapu.



1.0.1 Příklady k procvičení - afinní zobrazení

Příklad 1.0.1. Napište předpis zobrazení, které zobrazí kružnici $x^2 + y^2 = 1$ na elipsu $\frac{(x-5)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$.



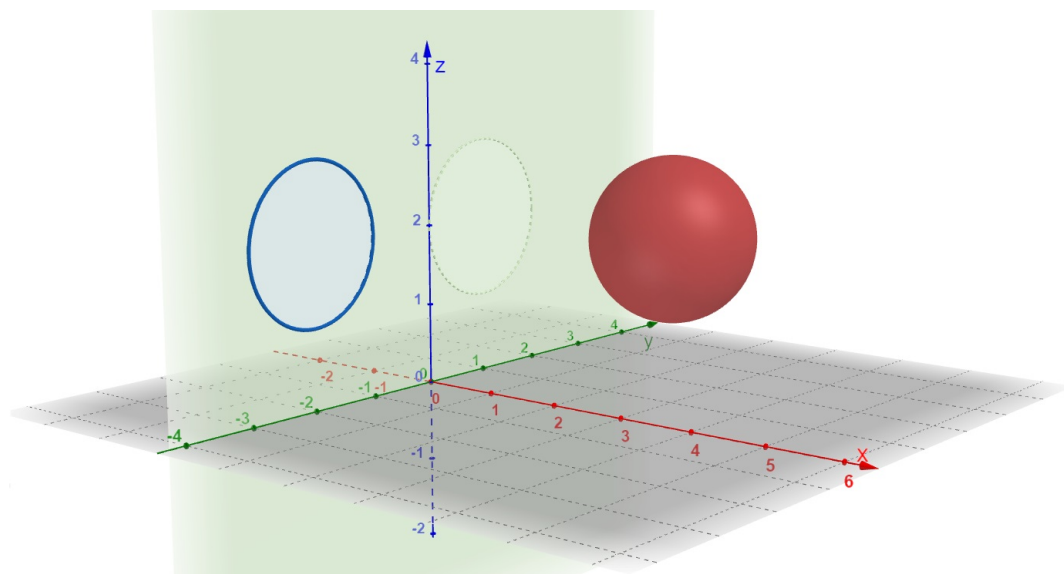
Příklad 1.0.2. Napište předpis zobrazení, které zobrazí kulovou plochu

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 1\}$$

na kruh

$$N = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2; (y+2)^2 + (z-2)^2 \leq 1\}.$$

v rovině $x = 0$.



1.0.2 Příklady k procvičení - parametrizace křivek

Příklad 1.0.3. Napište parametrické rovnice oblouku kružnice o poloměru 2 se středem v počátku souřadnicového systému ležícího v polorovině

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \leq -x\}.$$

Příklad 1.0.4. Napište parametrické rovnice oblouku kružnice o poloměru 2 se středem v bodě $[-1; 2]$, který leží v polorovině

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \leq -x - 1\}.$$

Příklad 1.0.5. Napište parametrické rovnice paraboly $y = x^2$ ležící v polorovině

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \leq 8 - 2x\}.$$

Příklad 1.0.6. Napište parametrické rovnice paraboly $x = y^2$ ležící v polorovině

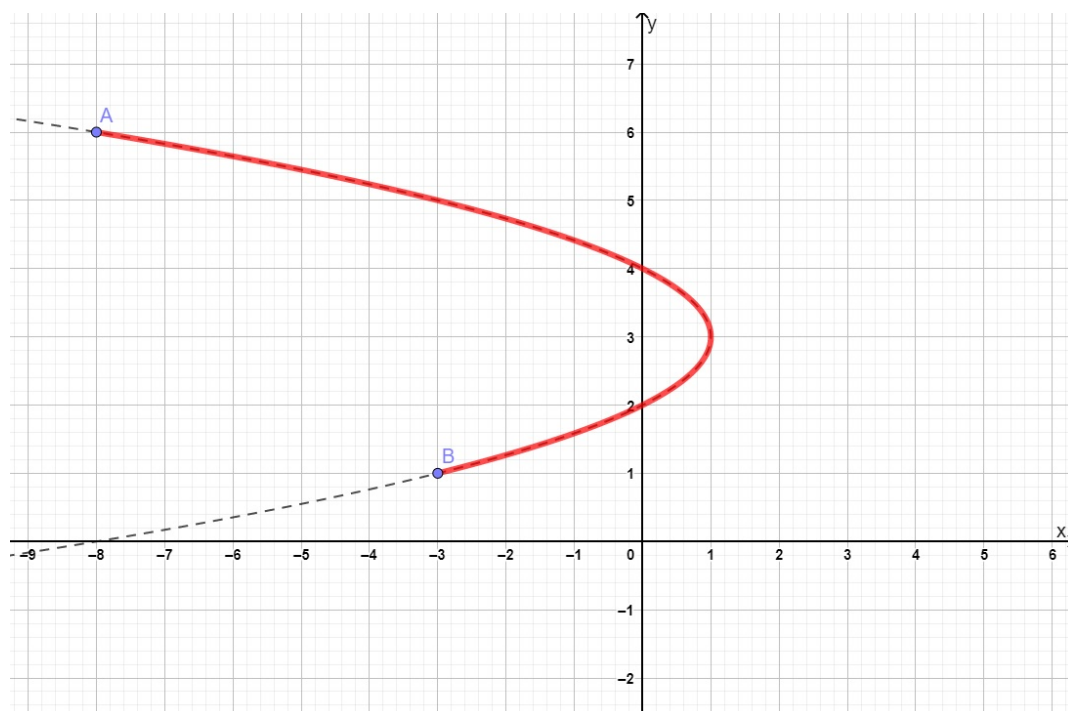
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \leq 2 - x\}.$$

Příklad 1.0.7. Napište parametrické rovnice úsečky spojující body $A = [1, 2, 3]$ a $B = [4, 3, 2]$.

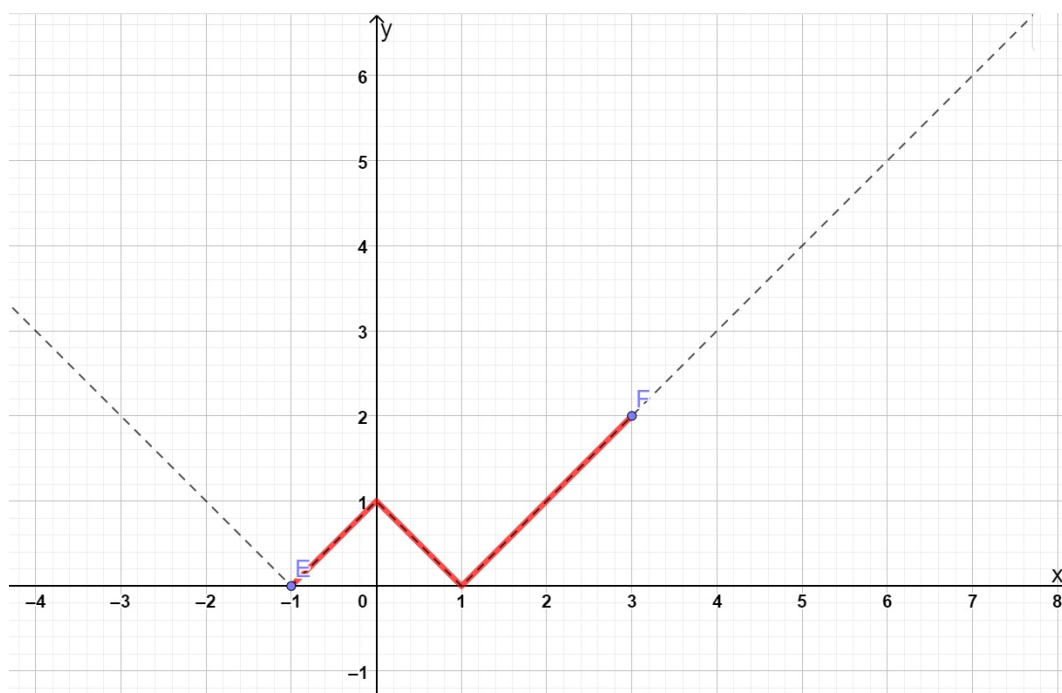
Příklad 1.0.8. Zakreslete křivku $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definovanou předpisem

$$\varphi(t) = (\arcsin t, 2t + 5), t \in [0, 1]$$

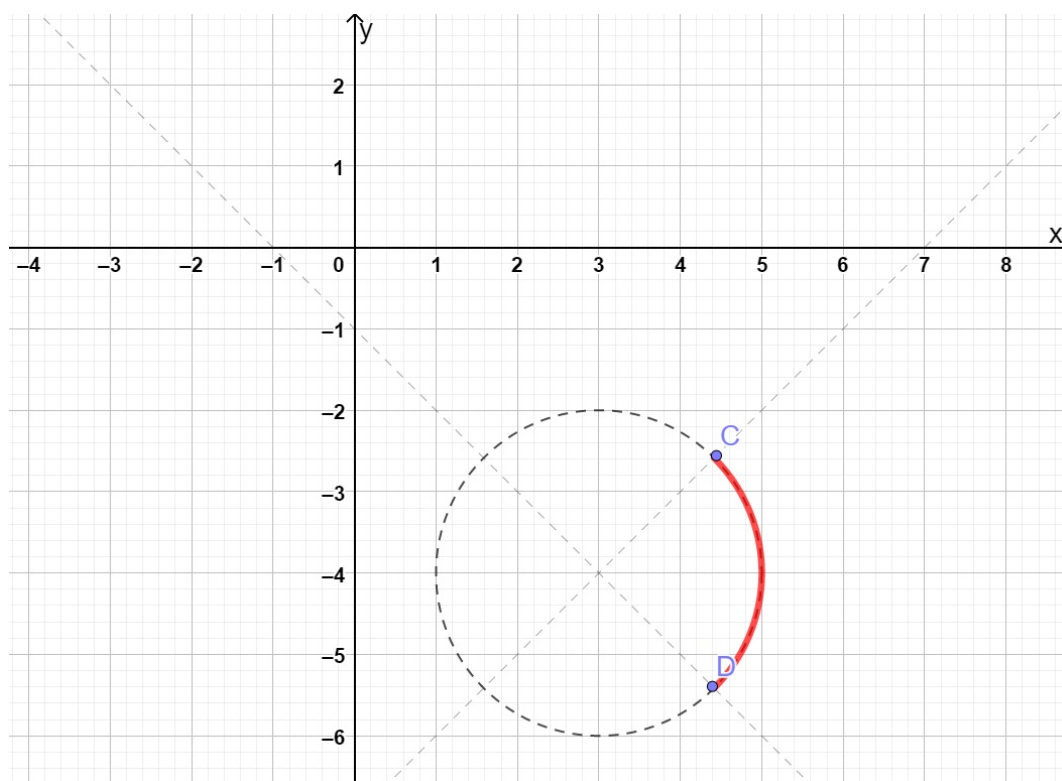
Příklad 1.0.9. Napište parametrickou rovnici křivky z bodu B do bodu A , která je částí paraboly.



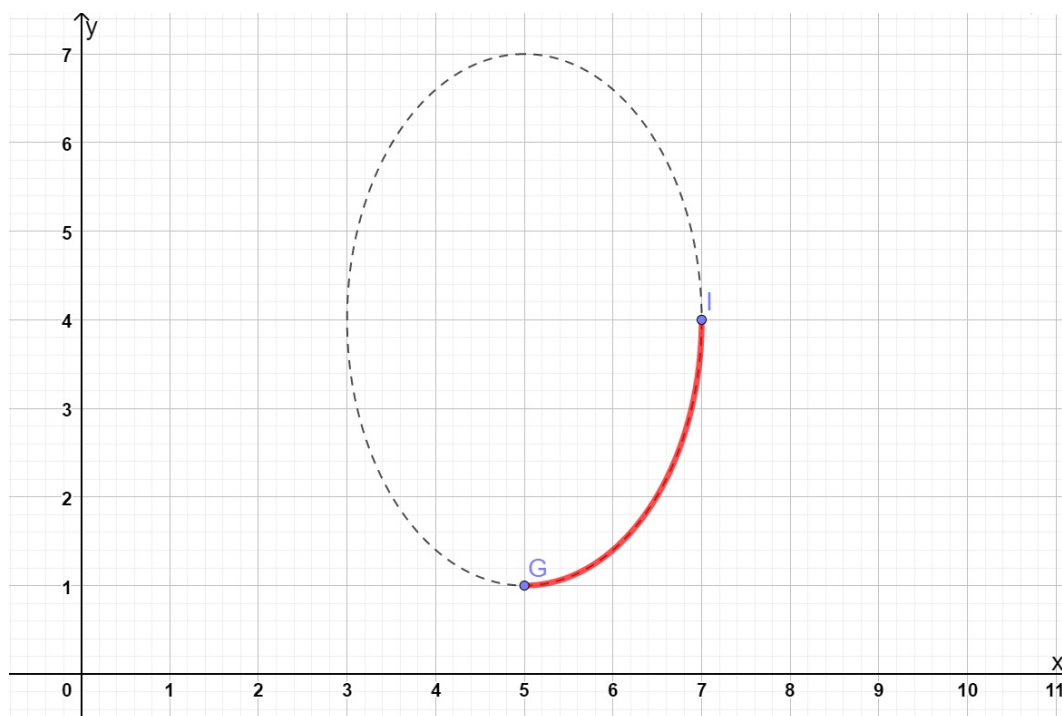
Příklad 1.0.10. Napište parametrickou rovnici křivky z bodu E do bodu F .



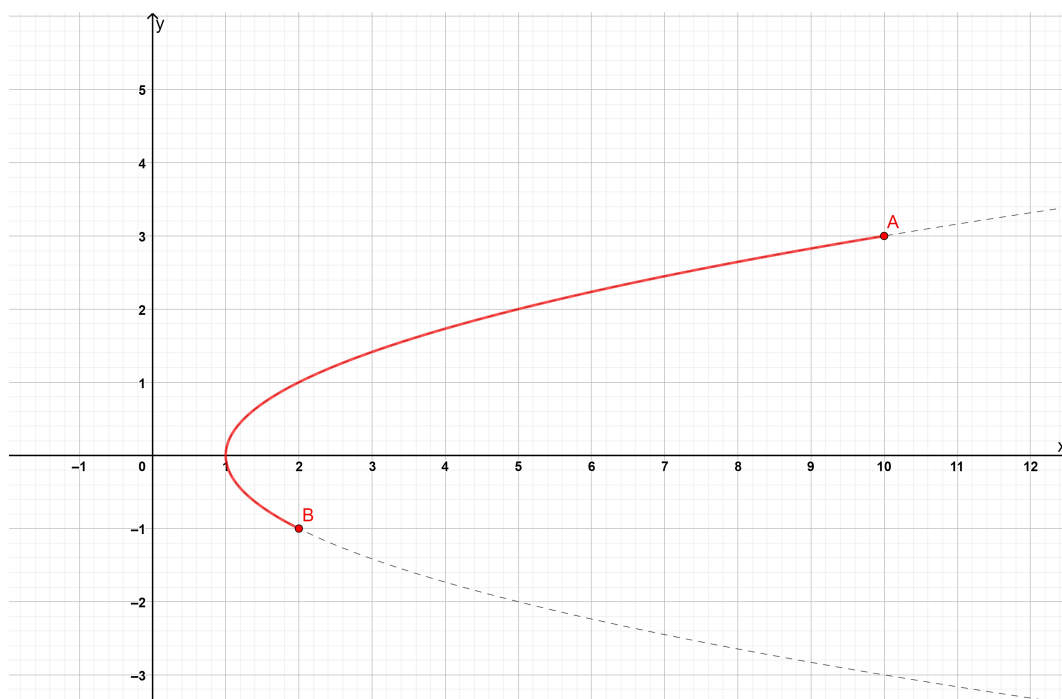
Příklad 1.0.11. Napište parametrickou rovnici rovinné křivky, která je částí kružnice z bodu D do bodu C .



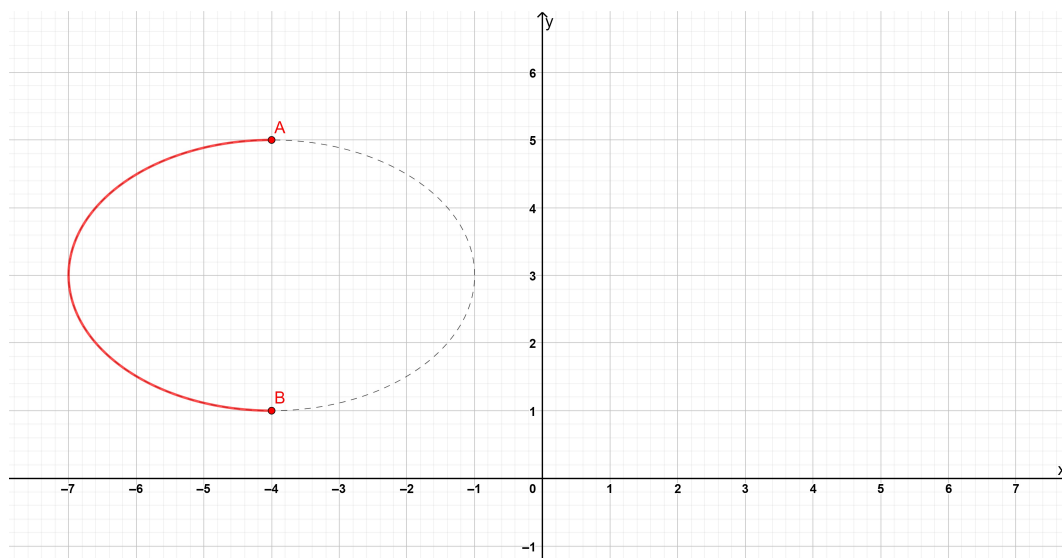
Příklad 1.0.12. Napište parametrickou rovnici rovinné křivky, která je částí elipsy z bodu G do bodu I .



Příklad 1.0.13. Napište parametrickou rovnici části paraboly na obrázku z bodu B do bodu A .



Příklad 1.0.14. Napište parametrickou rovnici části elipsy z bodu A do bodu B .



Příklad 1.0.15. Napište parametrické rovnice oblouku kružnice

$$x^2 + y^2 - 6x - 12y + 41 = 0,$$

který leží v polovině

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \leq x + 5\}.$$

Příklad 1.0.16. Napište parametrické rovnice křivky

$$16x^2 + 36y^2 + 16x - 108y - 59 = 0.$$

Příklad 1.0.17. Zakreslete křivku $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ definovanou předpisem

a) $\varphi(t) = (2^t, 2^{-t}), t \in \mathbb{R}$

b) $\varphi(t) = (3^t, 3^{t+1} - 9^t), t \in [0, 1]$

c) $\varphi(t) = (\log_2(\sin t), \sin^2 t), t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$

Výsledky

1.0.1. $L(x, y) = (2x + 5, 3y + 3)$

1.0.2. $L(x, y, z) = (0, y - 3, z)$

1.0.3. $\varphi(t) = (2 \cos t, 2 \sin t), t \in [\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}]$

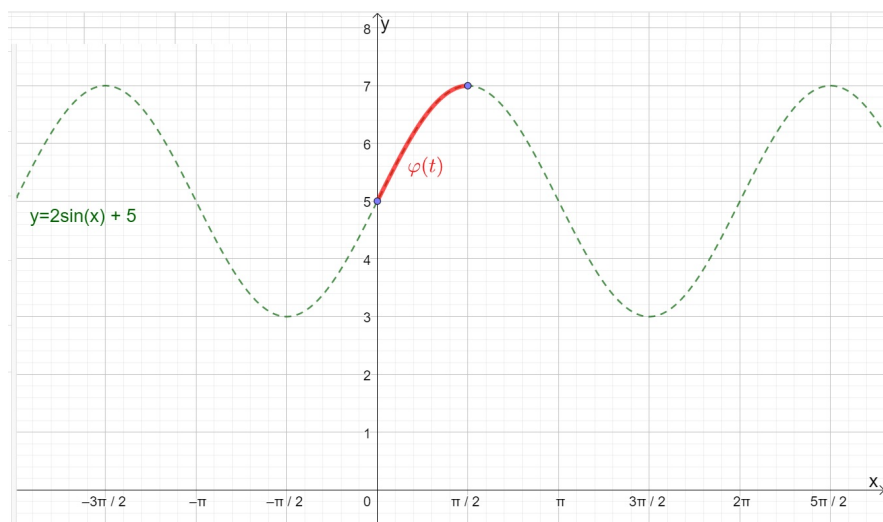
1.0.4. $\varphi(t) = (2 \cos t - 1, 2 \sin t + 2), t \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$

1.0.5. $\varphi(t) = (t, t^2), t \in [-4, 2]$

1.0.6. $\varphi(t) = (t^2, t), t \in [-2, 1]$

1.0.7. $\varphi(t) = (1 + 3t, 2 + t, 3 - t), t \in [0, 1]$

1.0.8. Křivka φ je část sinusoidy $y = 2 \sin x + 5$ z bodu $[0, 5]$ do bodu $[\frac{\pi}{2}, 7]$.



1.0.9. $\varphi(t) = (-(t - 3)^2 + 1, t), t \in [1, 6]$

1.0.10. $\varphi(t) = (t, ||t| - 1|), t \in [-1, 3]$

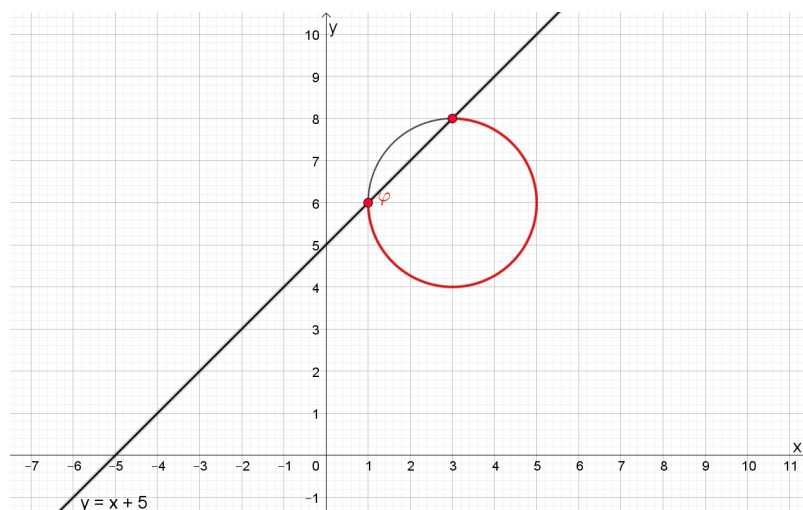
1.0.11. $\varphi(t) = (2 \cos t + 3, 2 \sin t - 4), t \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$

1.0.12. $\varphi(t) = (2 \cos t + 5, 3 \sin t + 4), t \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$

1.0.13. $\varphi(t) = (t^2 + 1, t), t \in [-1, 3]$

1.0.14. $\varphi(t) = (3 \cos t - 4, 2 \sin t + 3), t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

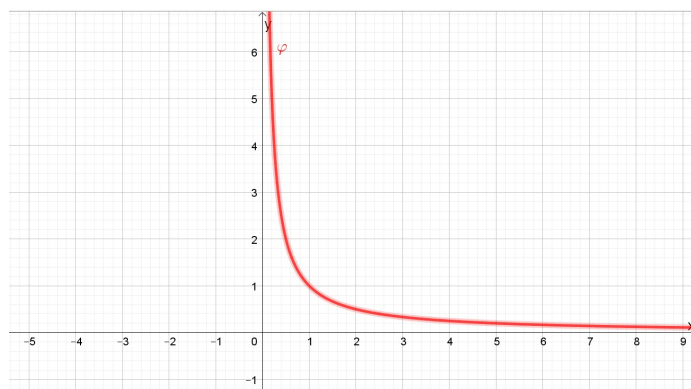
1.0.15. $\varphi(t) = (2 \cos t + 3, 2 \sin t + 6), t \in [\pi, \frac{5\pi}{2}]$



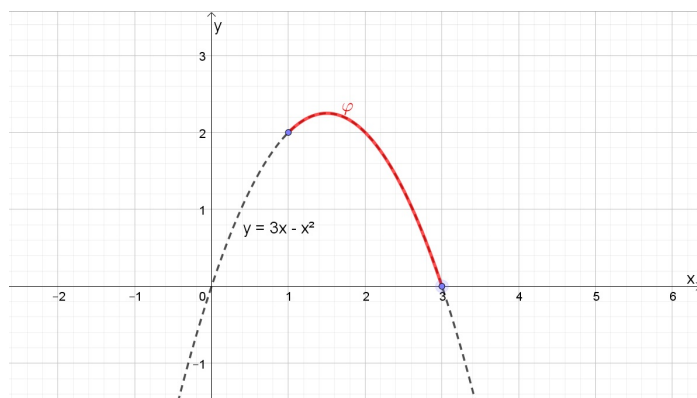
1.0.16. Křivka φ je elipsa se středem $[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}]$ s délkami poloos 3 a 2,

$$\varphi(t) = (3 \cos t - \frac{1}{2}, 2 \sin t + \frac{3}{2}), t \in [0, 2\pi)$$

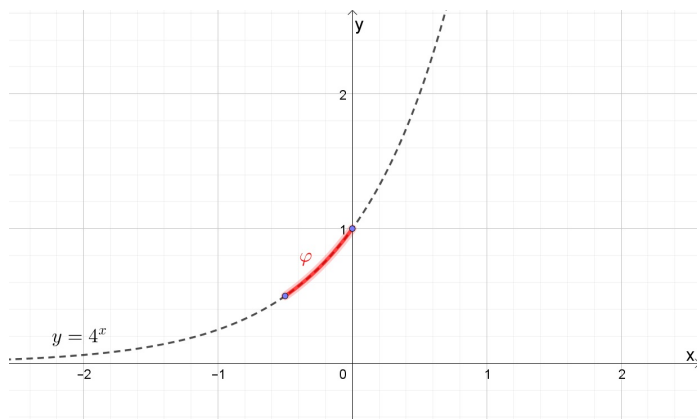
1.0.17. a) Křivka φ je jedna větev hyperboly $y = \frac{1}{x}$ pro $x > 0$.



b) Křivka φ je jedna část paraboly $y = 3x - x^2$ z bodu $[1; 2]$ do bodu $[3; 0]$.



b) Křivka φ je jedna část grafu exponenciální funkce $y = 4^x$ z bodu $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ do bodu $[0; 1]$.



2. Diferenciální počet

2.1 Diferenciální počet funkce jedné proměnné

Připomeňme nejprve definici derivace.

Definice 2.1.1. Derivaci funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ v bodě $a \in D_f^0$ definujeme jako

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (2.1)$$

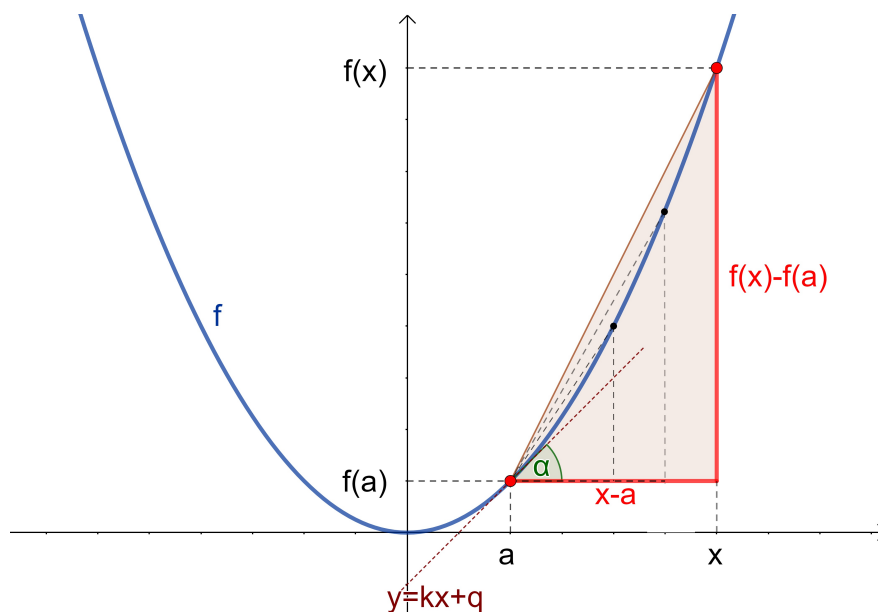
Pokud tato limita existuje a má konečnou hodnotu, pak říkáme, že funkce f je **diferencovatelná** v bodě a (nebo také, že f má vlastní derivaci v bodě a).

Jaký je geometrický význam derivace? Zvolme bod $a \in D_f$ pevně a někde v jeho blízkosti zvolme libovolně bod x . Podíl

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (2.2)$$

je podíl dvou odvěsen v nějakém pravoúhlém trojúhelníku. Zároveň je toto číslo směrnici přímky (sečny) procházející body $[a, f(a)]$ a $[x, f(x)]$. Nyní si představme, že budeme bod x volit pořád blíže k bodu a - tím budeme dostávat pořád menší a menší trojúhelníky. Čím více se budeme bodem x přibližovat k bodu a , tím více se nám bude zdát, že přepona tohoto trojúhelníku leží na tečně k funkci f v bodě a . Směrnice této tečny je tedy limitou tohoto podílu (2.2) v takovém "nekonečně malém trojúhelníku". Zároveň je rovna tangenci úhlu α v tomto trojúhelníku, tj.

$$k = f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \operatorname{tg} \alpha \quad (2.3)$$



⁸Vzpomeňme si, že funkce tangens je v pravoúhlém trojúhelníku definována jako **podíl protilehlé odvěsny ku přilehlé odvěsně** k danému úhlu. (neboť $\operatorname{tg} = \frac{\sin}{\cos}$)

Poznámka. Touto konstrukcí jsme popsali pouze existenci jednostranné derivace. Derivace funkce f v bodě a existuje tehdy, existuje-li tato limita zprava i zleva a mají stejnou hodnotu.

Poznámka. Taková limita (2.1) je vždy typu $\frac{0}{0}$, což je neurčitý výraz. Pokud tedy počítáme derivaci přímo z definice, vždy musíme při výpočtu této limity provést nějaké úpravy nebo použít známé limity, nikdy nelze ihned dosadit za $x = a$.

Poznámka. Zavedením substituce $h := x - a$ v definici (2.1) získáme

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad (2.4)$$

což se často udává jako definice derivace funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ v bodě $a \in D_f^0$, která je ekvivalentní s definicí 2.1.1.

Zkusme si nyní spočítat derivace některých funkcí přímo z definice.

Příklad 2.1.2. Spočtěme derivaci lineární funkce

$$f(x) = kx + q,$$

kde $k, q \in \mathbb{R}$ jsou libovolné konstanty.

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{kx + q - ka - q}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{k(x - a)}{x - a} = k.$$

Protože $a \in D_f$ mohl být libovolný bod, získáváme, že pro všechna $x \in D_f$ platí

$$(kx + q)' = k.$$

Příklad 2.1.3. Spočtěme derivaci funkce

$$f(x) = x^2$$

Zvolme $a \in D_f$ libovolně.

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)(x + a)}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} (x + a) = a + a = 2a. \end{aligned}$$

Tedy pro všechna $x \in D_f$ platí

$$(x^2)' = 2x.$$

Příklad 2.1.4. Spočtěme derivaci funkce

$$f(x) = x^3$$

Zvolme $a \in D_f$ libovolně.

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)(x^2 + ax + a^2)}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} (x^2 + ax + a^2) = a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2. \end{aligned}$$

Tedy pro všechna $x \in D_f$ platí

$$(x^3)' = 3x^2.$$

Příklad 2.1.5. Spočtěme derivaci mocninné funkce

$$f(x) = x^n$$

pro $n \in \mathbb{N}$. Zvolme $a \in D_f$ libovolně.

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1})}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} (x^{n-1} + ax^{n-2} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1}) = \\ &= a^{n-1} + aa^{n-2} + \dots + a^{n-2}a + a^{n-1} = na^{n-1}. \end{aligned}$$

Tedy pro všechna $x \in D_f$ a $n \in \mathbb{N}$ platí

$$(x^n)' = nx^{n-1}. \quad (2.5)$$

Tento vztah pro derivaci mocninné funkce platí i pro libovolné $n \in \mathbb{R}$. (to lze ukázat např. použitím definice obecné mocniny $a^x = e^{x \ln a}$).

Všechny tzv. "tabulkové" derivace, které je potřeba si pamatovat se odvodí stejným způsobem, tj. výpočtem limity (2.1).

f	f'	$\mathcal{D}(f)$	$\mathcal{D}(f')$	Pozn.
const.	0	$\mathbf{R}$	• (tj. jako $\mathcal{D}(f)$)	
x^n	nx^{n-1}	$\mathbf{R}$	•	$n \in \mathbf{N}$
x^a	ax^{a-1}	$x > 0$	•	$a \in \mathbf{R}$
e^x	e^x	$\mathbf{R}$	•	
a^x	$a^x \ln a$	$\mathbf{R}$	•	$a > 0$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$	•	
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$x > 0$	•	$a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbf{R}$	•	
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbf{R}$	•	
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	•	
$\operatorname{cotg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi$	•	
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\langle -1, 1 \rangle$	$(-1, 1)$	v ± 1 : jen jednostranné derivace
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\langle -1, 1 \rangle$	$(-1, 1)$	v ± 1 : jen jednostranné derivace
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbf{R}$	•	
$\operatorname{arccotg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbf{R}$	•	

Obrázek 2.1: Tabulka základních derivací

⁹V předcházejících příkladech jsme použili rozklad na součin podle vzorců:

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

$$A^n - B^n = (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + \dots + AB^{n-2} + B^{n-1})$$

Definice 2.1.6. Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ **spojitá** v bodě $a \in D_f$, pokud

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a). \quad (2.6)$$

Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ **spojitá** na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$, pokud je spojitá v každém bodě tohoto intervalu, tj.

$$\forall a \in I : \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

přičemž je-li a krajním bodem intervalu I , pak hovoříme o jednostranné spojitosti a limita (2.6) je jednostranná (zleva či zprava).

Značení. Zápisem $f \in C(I)$ rozumíme, že funkce f je spojitá na intervalu I .

Značení. Zápisem $f \in C^k(I)$ rozumíme, že funkce f je spojitá na intervalu I a všechny její derivace až do řádu k existují a jsou spojité na intervalu I .

Následující tvrzení říká, že **z existence vlastní derivace vyplývá spojitost**. Opačná implikace ale neplatí, tj. ze spojitosti nevyplývá existence derivace.

Tvrzení 2.1.7 (Vztah derivace a spojitosti). *Nechť $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a $a \in D_f$. Pokud existuje $f'(a)$ a má konečnou hodnotu, pak funkce f je spojitá v bodě a .*

Důkaz. Chceme ukázat, že

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

tedy

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = 0.$$

Rozšířením výrazu získáme

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} (x - a) = \\ &= f'(a) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

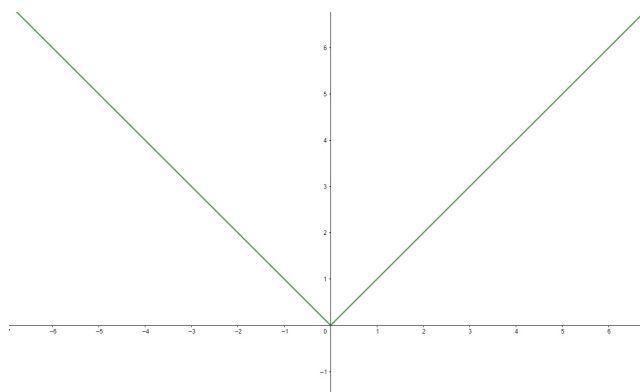
Ve druhé rovnosti jsme využili větu o limitě součinu, neboť předpokládáme, že existuje konečná derivace $f'(a)$ a tedy pravá strana rovnosti má smysl. (v případě, kdyby $f'(a)$ byla nevlastní, tj. $\pm\infty$, pak bychom větu o limitě součinu použít nemohli, neboť $\infty \cdot 0$ je neurčitý výraz)

□

Poznámka. Ze spojitosti nevyplývá existence derivace. Protipříkladem může být funkce

$$f(x) = |x|,$$

která je spojitá v 0 ale derivace $f'(0)$ neexistuje.



Tvrzení 2.1.8 (Linearita derivace). *Nechť f a g jsou diferencovatelné funkce na intervalu I a nechť $a, b \in \mathbb{R}$ jsou konstanty. Pak*

$$(af(x) + bg(x))' = af'(x) + bg'(x) \quad (2.7)$$

Derivace je lineární zobrazení - tedy derivace součtu funkcí je součet jejich derivací a zároveň derivace skalárního násobku nějaké funkce je skalární násobek její derivace, tj. multiplikativní konstantu lze vytýkat před derivaci. Při derivování využíváme linearitu derivace následujícím způsobem.

Příklad 2.1.9.

$$(2x^3 + 3 \sin x)' = 2(x^3)' + 3(\sin x)' = 6x^2 + 3 \cos x$$

Připomeňme základní pravidla pro počítání s derivacemi - jak se derivuje součin a podíl funkcí a funkce složená (řetízkové pravidlo).

Tvrzení 2.1.10 (Pravidla pro počítání s derivacemi).

$$\begin{aligned} (fg)' &= f'g + fg' \\ \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f'g - fg'}{g^2} \\ (f(g(x)))' &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \end{aligned}$$

Připomeňme, že z první derivace určíme intervaly monotonie a stacionární body; z druhé derivace určíme intervaly konvexity a inflexní body.

Tvrzení 2.1.11 (Vztah monotonie a 1. derivace).

Je-li $f' > 0$ na intervalu I , pak funkce f je rostoucí na I .

Je-li $f' < 0$ na intervalu I , pak funkce f je klesající na I .

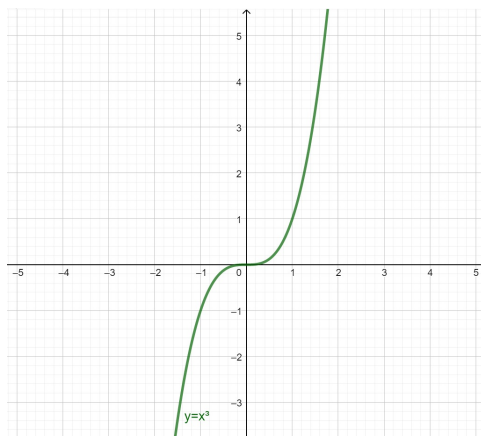
Tvrzení 2.1.12 (Vztah konvexity a 2. derivace).

Je-li $f'' > 0$ na intervalu I , pak funkce f je konvexní na I .

Je-li $f'' < 0$ na intervalu I , pak funkce f je konkávní na I .

Definice 2.1.13 (Stacionární bod). Je-li $f'(a) = 0$, pak bod a nazýváme **stacionární bod** funkce f .

Poznámka. Stacionární bod funkce (též kritický bod) je bod podezřelý z extrému. Přesněji, je to bod, ve kterém má daná funkce tečnou s nulovou směrnici (tj. tečna je konstantní funkce). Např. funkce $y = x^3$ má jediný stacionární bod $x = 0$, ale nemá v tomto bodě extrém.



Definice 2.1.14 (Inflexní bod). Je-li $f''(a) = 0$ a f'' v tomto bodě mění znaménku, nazýváme bod a **inflexní bod** funkce f .

Poznámka. Inflexní bod je tedy takový bod, ve kterém dochází ke změně prohnutí z konvexního na konkávní nebo naopak.

Příklad 2.1.15. Vyšetřeme průběh funkce

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x.$$

Definičním oborem této funkce je $D_f = \mathbb{R}$. První derivace této funkce je

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9.$$

Hledejme stacionární body funkce f , tedy řešme rovnici $f'(x) = 0$

$$3x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$3(x^2 - 4x + 3) = 0$$

$$3(x - 3)(x - 1) = 0$$

$$x = 3 \quad \vee \quad x = 1$$

Podívejme se na znaménka první derivace na intervalech $(-\infty, 1)$, $(1, 3)$ a $(3, \infty)$.

$$\forall x \in (-\infty, 1) : f'(x) > 0 \Rightarrow \text{Funkce } f \text{ je rostoucí na intervalu } (-\infty, 1).$$

$$\forall x \in (1, 3) : f'(x) < 0 \Rightarrow \text{Funkce } f \text{ je klesající na intervalu } (1, 3).$$

$$\forall x \in (3, \infty) : f'(x) > 0 \Rightarrow \text{Funkce } f \text{ je rostoucí na intervalu } (3, \infty).$$

V bodě $x = 1$ nabývá funkce lokálního maxima a jeho y -ová souřadnice je

$$f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 = 4.$$

V bodě $x = 3$ nabývá funkce lokálního minima a jeho y -ová souřadnice je

$$f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 = 0.$$

Druhá derivace této funkce je

$$f''(x) = 6x - 12$$

Položíme-li $f''(x) = 0$, je řešením této rovnice $x = 2$ a tento bod je skutečně inflexním bodem funkce f , neboť:

$$\forall x \in (-\infty, 2) : f''(x) < 0 \Rightarrow \text{Funkce } f \text{ je konkávní na intervalu } (-\infty, 2).$$

$$\forall x \in (2, \infty) : f''(x) > 0 \Rightarrow \text{Funkce } f \text{ je konvexní na intervalu } (2, +\infty).$$

Dopočtíme y -ovou souřadnici inflexního bodu:

$$f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 = 2.$$

Určeme limity v krajních bodech definičního oboru:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 6x^2 + 9x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2}\right) = \infty(1 - 0 + 0) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 6x^2 + 9x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2}\right) = -\infty(1 - 0 + 0) = -\infty$$

Určeme průsečíky s osou x , tedy řešme rovnici $f(x) = 0$.

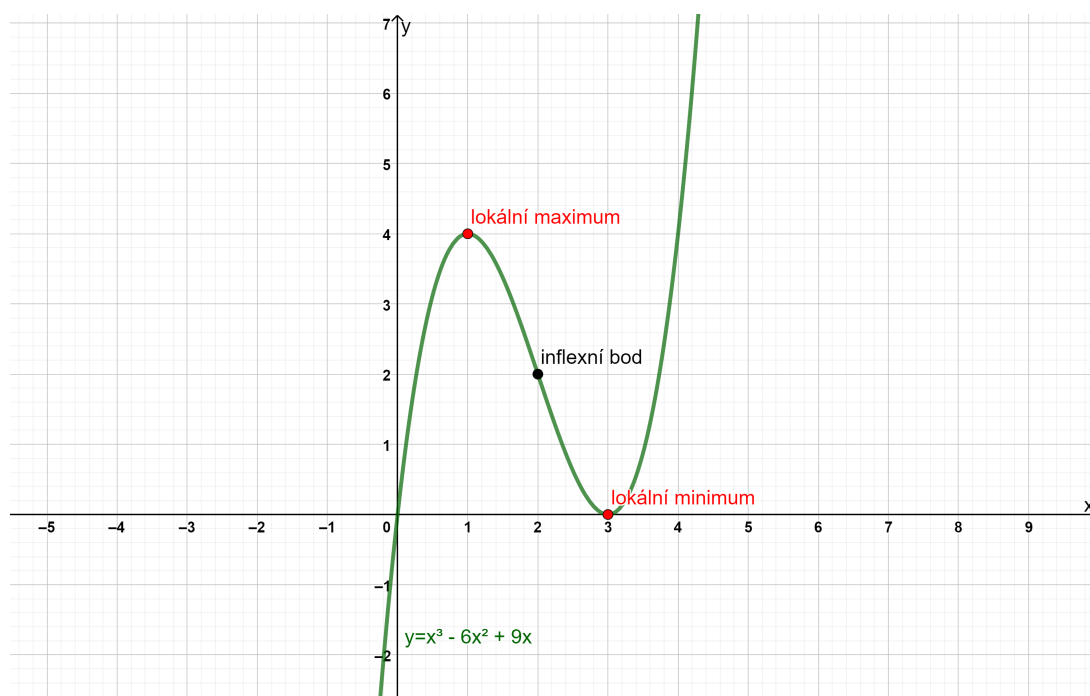
$$x^3 - 6x^2 + 9x = 0$$

$$x(x^2 - 6x + 9) = 0$$

$$x(x - 3)^2 = 0$$

$$x = 0 \quad \vee \quad x = 3$$

Tedy průsečíky s osou x jsou $[0,0]$ a $[3,0]$.



Obrázek 2.2: Graf funkce $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

Jak rozhodnout o tom, zda má funkce v nějakém stacionárním bodě extrém? Jedna možnost je podívat se na okolí tohoto bodu a určit intervaly monotonie, tj. kde je funkce rostoucí a kde klesající. Z toho ihned usoudíme, zda jde o extrém a jakého typu. Druhou možností je použít následující tvrzení o vztahu druhé derivace a lokálních extrémů.

Tvrzení 2.1.16 (Vztah 2. derivace a lokálních extrémů.). *Nechť a je stacionární bod funkce f .*

Je-li $f''(a) > 0$, pak a je lokální minimum funkce f .

Je-li $f''(a) < 0$, pak a je lokální maximum funkce f .

Příklad 2.1.17. Najděme extrém funkce

$$f(x) = x^3 - 3x$$

Spočtěme první i druhou derivaci.

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f''(x) = 6x$$

Funkce f má dva stacionární body, neboť

$$f'(x) = 0 \iff 3(x^2 - 1) = 0 \iff x = \pm 1$$

Využitím předchozího tvrzení dostáváme:

$$f''(1) = 6 > 0 \implies \text{funkce } f \text{ nabývá minima pro } x = 1.$$

$$f''(-1) = -6 < 0 \implies \text{funkce } f \text{ nabývá maxima pro } x = -1.$$

Příklad 2.1.18. Určeme rovnici tečny k funkci

$$f(x) = x^2 - 6x + 5$$

v bodě $a = 1$. Hledáme tedy rovnici přímky ve tvaru

$$y = kx + q,$$

přičemž směrnice této přímky má být stejná jako derivace funkce f v bodě a , tedy

$$k = f'(a).$$

Spočtěme tedy derivaci funkce f a vyčíslíme ji v bodě $a = 1$.

$$f'(x) = 2x - 6$$

$$f'(1) = 2 \cdot 1 - 6 = -4 = k$$

Tečna musí zároveň procházet bodem $[1; f(1)]$, tedy rovnice

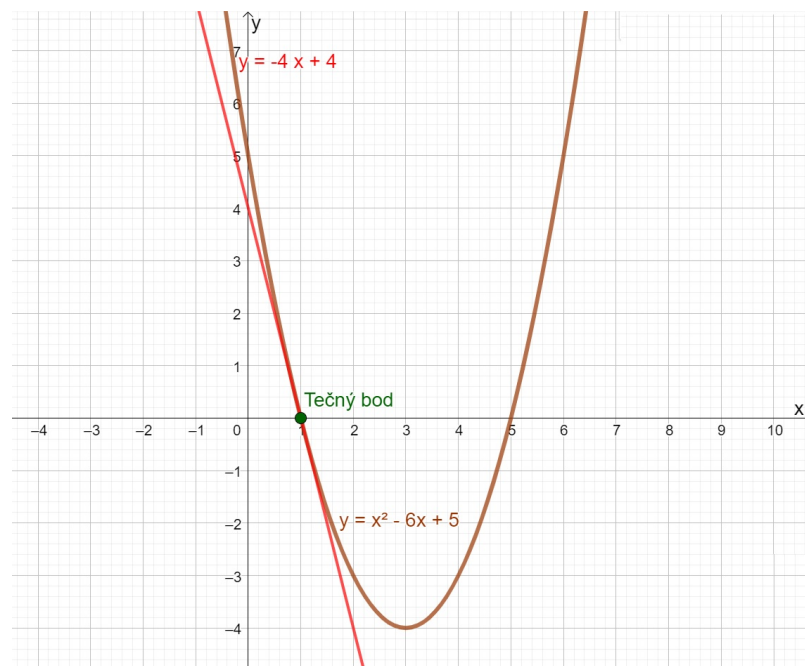
$$y = -4x + q$$

musí být splněna, je-li $x = 1$ a $y = f(1) = 0$. Dosazením do této rovnice získáme:

$$0 = -4 \cdot 1 + q \implies q = 4$$

Rovnice hledané tečny tedy je

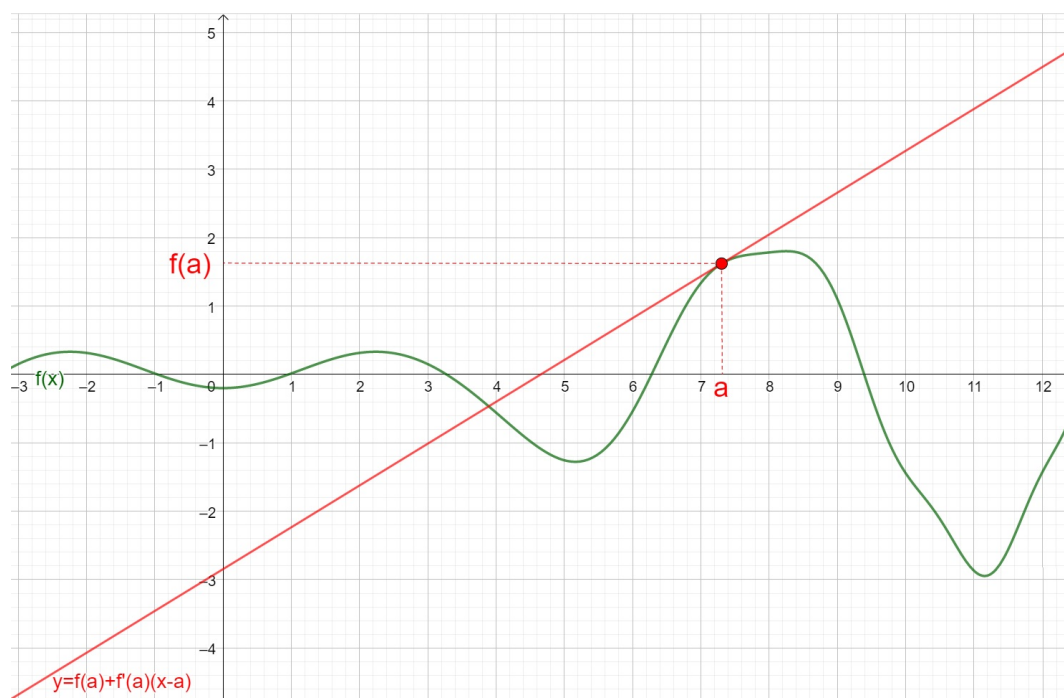
$$y = -4x + 4$$



Obrázek 2.3: Tečna $y = -4x + 4$ ke grafu funkce $f(x) = x^2 - 6x + 5$ v bodě $[1; 0]$

Definice 2.1.19. Tečna ke grafu funkce f v bodě $[a; f(a)]$ je přímka o rovnici

$$y = f(a) + f'(a)(x - a) \quad (2.8)$$



Poznámka. Tato definice zahrnuje pouze tečny, které jsou grafy lineární funkce. Tečna ke grafu nějaké funkce ale může být i svislá přímka, tj. přímka o rovnici $x = C$, kde $C \in \mathbb{R}$ je konstanta. Například funkce

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

má v bodě $a = 0$ tečnu o rovnici $x = 0$.

2.1.1 Taylorův polynom

Definice 2.1.20. Polynom stupně $n \in \mathbb{N}$ s koeficienty $a_k \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, je funkce

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n \quad (2.9)$$

Polynomy mají ty příjemné vlastnosti, že se snadno derivují i integrují a snadno je lze vyčíslit v nějakém bodě. Vyčíslit polynom stupně n v nějakém konkrétním bodě představuje konečný počet aritmetických operací - nejprve umocníme (nanejvýš) n čísel, pak každou z těchto mocnin vynásobíme nebo vydělíme nějakou konstantou a na závěr tyto dílčí mezivýsledky sečteme. Tedy při vyčíslování polynomu n -tého stupně provedeme nanejvýš $n^2 + n - 1$ aritmetických operací. Vyčíslit polynom v racionálním bodě bychom tedy měli vždy dokázat (alespoň teoreticky) bez použití kalkulačky.

Problém může být následující: Řekněme, že nás zajímá přibližná hodnota

$$\cos 0,02$$

a nemáme zrovna po ruce kalkulačku. Dokážeme-li funkci $\cos x$ aproximovat na okolí nuly nějakým vhodným polynomem, pak hodnotu $\cos 0,02$ můžeme odhadnout hodnotou tohoto polynomu v bodě $0,02$. Vždy se při tom ale dopustíme nějaké chyby - a tato chyba je tím menší, čím lepší je tato aproximace, tedy čím vyšší je stupeň tohoto polynomu.

Definice 2.1.21 (Taylorův polynom). Má-li funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ v bodě $a \in D_f$ vlastní derivace až do řádu n včetně, tj.

$$\exists f(a), f'(a), f''(a), \dots, f^{(n)}(a) \in \mathbb{R},$$

pak Taylorovým polynomem funkce f v bodě a stupně n rozumíme

$$\mathbf{T}_{f,a}^n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \quad (2.10)$$

neboli

$$\mathbf{T}_{f,a}^n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Poznámka. Mějme na paměti, že Taylorův polynom je vždy polynom - umocněním všech závorek $(x-a)^k$ a úpravou výrazu bychom Taylorův polynom tvaru (2.10) dokázali upravit na polynom v základním tvaru (2.9). Nemusíme to ale vždy nutně dělat. V některých situacích Taylorův polynom nebudeme upravovat na základní tvar polynomu a spokojíme se se zápisem ve tvaru (2.10).

Poznámka. Taylorův polynom 1. stupně je totéž jako rovnice tečny tvaru (2.8).

Poznámka. Taylorův polynom v bodě $a = 0$ nazýváme Maclaurinův polynom.

Příklad 2.1.22. Spočtěme Taylorův polynom druhého stupně funkce

$$f(x) = \cos x$$

v bodě $a = 0$.

Potřebujeme tedy spočítat $f(0)$, $f'(0)$ a $f''(0)$.

$$f(0) = \cos 0 = 1$$

$$f'(x) = -\sin x|_{x=0} = -\sin 0 = 0$$

$$f''(x) = -\cos x|_{x=0} = -\cos 0 = -1$$

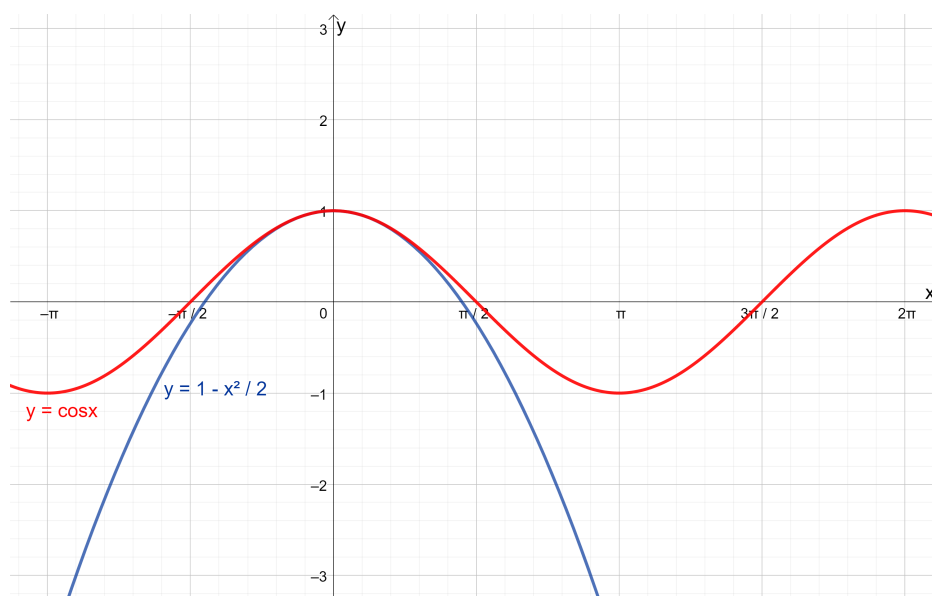
Nyní již můžeme hledaný Taylorův polynom sestavit:

$$\mathbf{T}_{f,0}^2(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 = 1 + 0 \cdot x + \frac{(-1)}{2!} \cdot x^2 = 1 - \frac{x^2}{2}$$

Funkci $\cos x$ tedy můžeme na okolí nuly aproximovat kvadratickou funkcí

$$\mathbf{T}_{\cos x,0}^2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$$

Mluvíme tedy o kvadratické aproximaci.



Vraťme se nyní k předchozí otázce - hodnotu $\cos 0,02$ nyní můžeme odhadnout hodnotou Taylorova polynomu funkce $\cos x$ v tomto bodě, tedy

$$\cos 0,02 \approx 1 - \frac{0,02^2}{2} = 1 - \frac{0,0004}{2} = 1 - 0,0002 = 0,9998.$$

Porovnáme-li tuto přibližnou hodnotu s přesnou hodnotou $\cos 0,02$ získanou pomocí kalkulačky, zjistíme, že

$$|\cos 0,02 - \mathbf{T}_{\cos x,0}^2(0,02)| \doteq 0,000000006 < 10^{-8}$$

Vidíme, že chyba, které se při této aproximaci dopustíme je velmi malá. Říkáme, že chyba je řádu 10^{-8} .

Zkusme si nyní najít Taylorův polynom funkce $\cos x$ v nule vyššího řádu, třeba řádu čtyři, šest nebo osm. Potřebujeme tedy spočítat všechny její derivace až do řádu osm v bodě $a = 0$.

$$f^{(3)}(x) = \sin x|_{x=0} = \sin 0 = 0$$

$$f^{(4)}(x) = \cos x|_{x=0} = \cos 0 = 1$$

$$f^{(5)}(x) = -\sin x|_{x=0} = -\sin 0 = 0$$

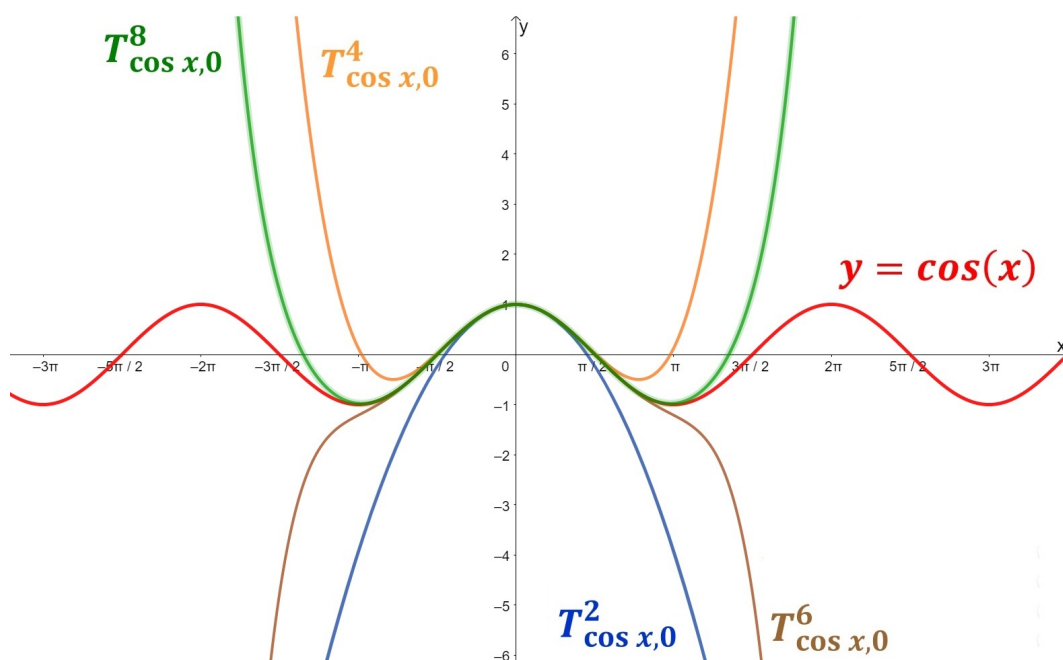
$$f^{(6)}(x) = -\cos x|_{x=0} = -\cos 0 = -1$$

$$f^{(7)}(x) = \sin x|_{x=0} = \sin 0 = 0$$

$$f^{(8)}(x) = \cos x|_{x=0} = \cos 0 = 1$$

Tedy již můžeme sestavit Taylorův polynom osmého řádu funkce $\cos x$ v bodě 0:

$$\mathbf{T}_{\cos x,0}^8(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}$$



Obrázek 2.4: Taylorovy polnomy funkce $\cos x$ v bodě 0 stupňů 2, 4, 6 a 8.

Možná už tušíte, jak by to pokračovalo dál. Posloupnost derivací $f^{(k)}(a)$ pro funkci $f(x) = \cos x$ v bodě $a = 0$ je posloupnost

$$1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \dots$$

Tedy umíme najít Taylorův polynom funkce $\cos x$ v 0 libovolného stupně n :

$$\mathbf{T}_{\cos x,0}^n(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} (-1)^n$$

neboli

$$\mathbf{T}_{\cos x,0}^n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} (-1)^k \quad (2.11)$$

Pokud bychom si vykreslili tento Taylorův polynom třeba pro $n = 1000$, tak se nám bude zdát, že ho na tomto intervalu už nerozeznáme od funkce kosinus. (avšak zdání klame - vždy mezi nimi bude nějaká malá odchylka). Věřte nebo ne, funkce kosinus je skutečně limitou této posloupnosti (2.11). Tedy pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí:

$$\cos x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} (-1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} (-1)^k \quad (2.12)$$

Tento "nekonečný Taylorův polynom" nazýváme Taylorovou řadou a funkce $\cos x$ je skutečně rovina jejímu součtu. Toto přijmeme za definici funkce kosinus. Není to však žádná "nová" definice - i když to na první pohled není vidět, je to přesně ta samá funkce kosinus, kterou známe ze střední školy.

Zkuste si rozmyslet, že podobně bychom mohli rozvinout funkci $\sin x$ i e^x . Shrňme to v následující definici.

Definice 2.1.23 (Taylorovy řady). Pro každé $x \in \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) platí:

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \\ \sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} (-1)^k \\ \cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} (-1)^k \end{aligned}$$

Následující tvrzení je známé jako tzv. Eulerova formule a říká, jak lze vyjádřit komplexní exponenciálu pomocí reálného sinu a reálného kosinu. Jinými slovy udává vztah mezi goniometrickým a exponenciálním tvarem komplexního čísla jednotkové velikosti.

Tvrzení 2.1.24 (Eulerova formule).

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Důkaz.

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} = 1 + ix + i^2 \frac{x^2}{2!} + i^3 \frac{x^3}{3!} + i^4 \frac{x^4}{4!} + i^5 \frac{x^5}{5!} \cdots = \\ &= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i \frac{x^5}{5!} \cdots = \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right) + i \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots\right) = \cos x + i \sin x \end{aligned}$$

V prvním kroku jsme nahradili funkci e^{ix} její Taylorovou řadou, poté jsme využili definici imaginární jednotky ($i^2 = -1$), dále jsme řady přerovnali a následně využili Taylorovy řady sinu a kosinu.

□

2.2 Diferenciální počet funkcí více proměnných

Definice 2.2.1. Parciální derivace funkce $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ v bodě $[x_0, y_0] \in D_f$ definujeme jako:

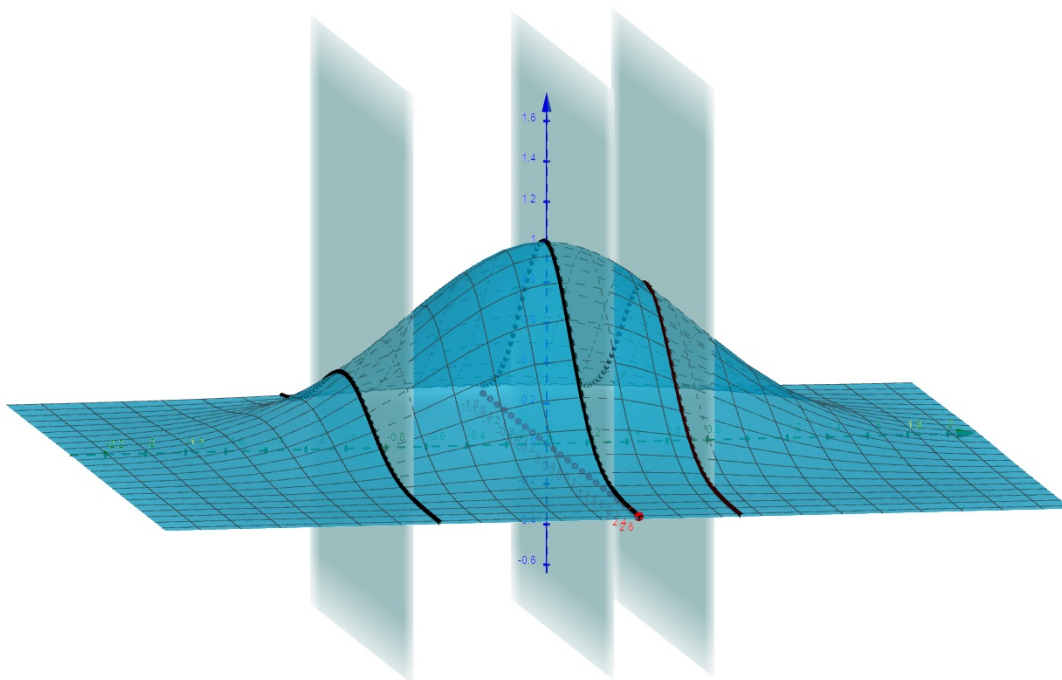
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

Pokud se na funkci $f(x, y)$ díváme jako na funkci proměnné x s parametrem y a za hodnotu tohoto parametru pevně zvolíme nějaké číslo y_0 , pak funkce $f(x, y_0)$ je funkce jedné proměnné - proměnné x . Označme tuto funkci $g(x) := f(x, y_0)$. Její derivace v bodě x_0 tedy je

$$(g(x))'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

Taková funkce g tedy "vznikne" řezem grafu funkce $f(x, y)$ rovinou $y = y_0$.



Obrázek 2.5: Řezy grafu funkce $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$

Parciální derivace funkce více proměnných je tedy totéž jako derivace funkce jedné proměnné (kterou jsme si odvodili v sekci 2.1), pokud se na ostatní proměnné díváme jako na parametry.

⁹Řezem grafu funkce $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ rovinami $y = 0$, $y = -1$ a $y = \frac{1}{2}$ jsou funkce

$$g_1(x) := f(x, 0) = e^{-x^2},$$

$$g_2(x) := f(x, -1) = e^{-(x^2+1)}$$

$$g_3(x) := f(x, \frac{1}{2}) = e^{-(x^2+\frac{1}{4})}$$

Definice 2.2.2 (Gradient). Gradient funkce $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ v bodě $A \in D_f$ je vektor parciálních derivací

$$\nabla f(A) = \text{grad } f(A) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(A), \frac{\partial f}{\partial y}(A) \right)$$

Gradient udává směr největšího růstu v daném bodě. Ukažme si to na následujícím příkladě.

Příklad 2.2.3. Určeme gradient funkce

$$f(x, y) = \sqrt{36 - 4x^2 - 4y^2}$$

v bodě $A = [-1; -2]$.

Určeme nejprve definiční obor této funkce. Výraz pod odmocninou musí být nezáporný, tedy

$$36 - 4x^2 - 4y^2 \geq 0,$$

z čehož dostaneme podmínku

$$x^2 + y^2 \leq 9.$$

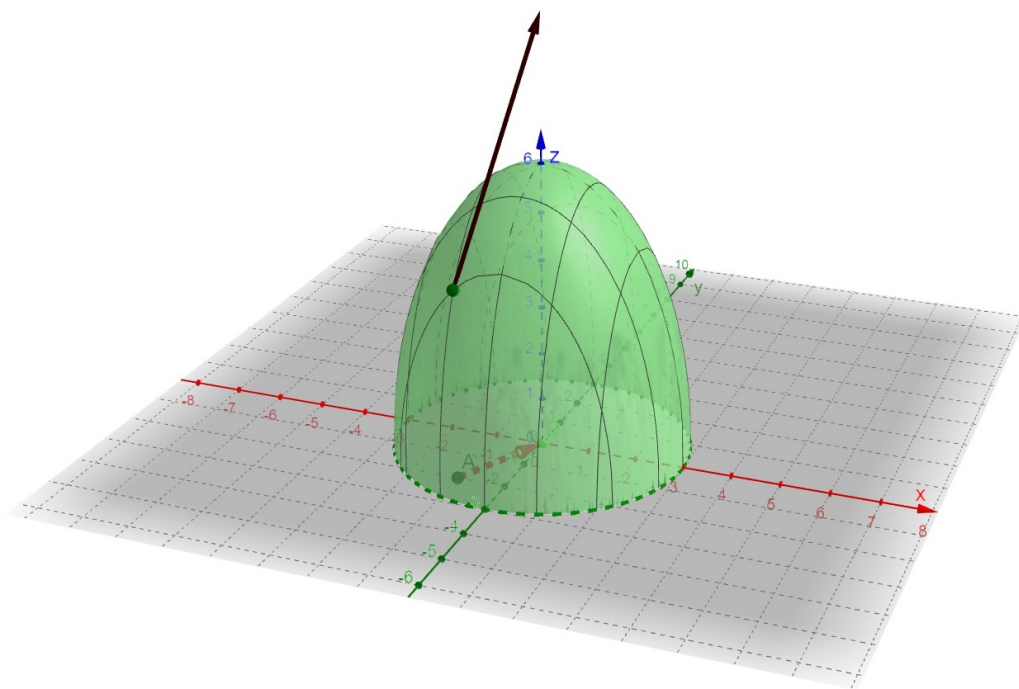
Definičním oborem této funkce je tedy kruh o poloměru 3 se středem v $[0, 0]$. Spočtěme nyní parciální derivace funkce f a vyčíslíme je v bodě A .

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{8x}{2\sqrt{36 - 4x^2 - 4y^2}} \quad \Big|_{[-1; -2]} = \frac{4}{\sqrt{16}} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{8y}{2\sqrt{36 - 4x^2 - 4y^2}} \quad \Big|_{[-1; -2]} = \frac{8}{\sqrt{16}} = 2$$

Tedy gradient funkce f v bodě A je vektor

$$\nabla f(A) = (1, 2).$$



Obrázek 2.6: Graf funkce $f(x, y) = \sqrt{36 - 4x^2 - 4y^2}$

Co jsme nyní vlastně spočítali? Podíváme-li se na graf funkce f "shora", tj. v rovině xy (jako bychom se dívali na mapu, přičemž graf funkce f si můžeme představovat třeba jako nějakou horu či kopec) a postavíme se na této mapě do bodu $[-1; -2]$, pak víme, že k tomu, abychom šli ve směru největšího růstu, musíme udělat na mapě jeden krok doprava ve směru osy x a dva kroky nahoru ve směru osy y .

Definice 2.2.4 (Stacionární bod). Nechť $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovatelná v bodě $A \in D_f$. Řekneme, že A je stacionární bod funkce f , pokud

$$\nabla f(A) = \vec{0}$$

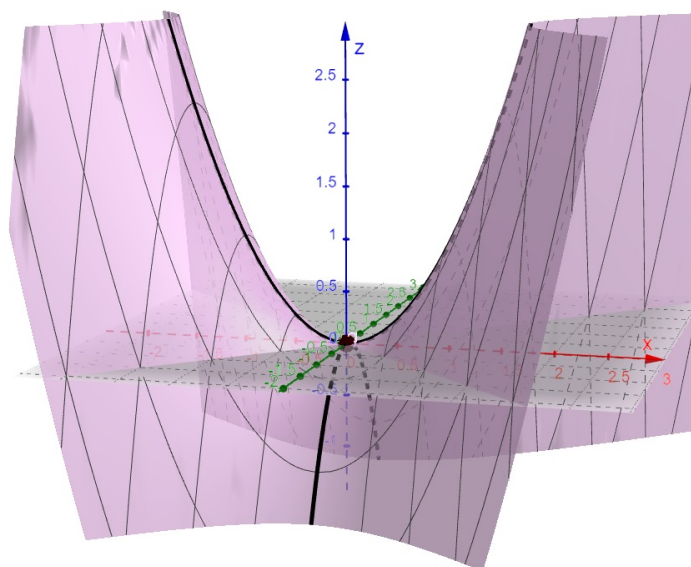
Poznámka. Stacionární bod je tedy bod, ve kterém jsou obě parciální derivace nulové. Jinými slovy je to bod, ve kterém je tečná rovina ke grafu funkce f rovnoběžná s rovinou $z = 0$ (tj. s rovinou xy). Jde tedy o "bod podezřelý z extrému".

Poznámka. Stacionární bod funkce $f(x, y) = \sqrt{36 - 4x^2 - 4y^2}$ z předchozího příkladu je $[0, 0]$ a tento bod je skutečně extrémem funkce f .

Příklad 2.2.5. Funkce

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

má jediný stacionární bod $[0; 0]$, avšak v tomto bodě nemá extrém.



Obrázek 2.7: Graf funkce $f(x, y) = x^2 - y^2$

Řezem grafu funkce f rovinou $y = 0$ je funkce

$$g(x) := f(x, 0) = x^2,$$

tedy konvexní parabola, která má v bodě $[0; 0]$ minimum, zatímco řezem grafu funkce f rovinou $x = 0$ je funkce

$$h(y) := f(0, y) = -y^2,$$

tedy konkávní parabola, která má v bodě $[0; 0]$ maximum. Takový bod nazýváme **sedlový bod**.

Definice 2.2.6 (Tečná rovina). Necht $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovatelná funkce v bodě $A = [x_0, y_0] \in D_f$. Tečná rovina k funkci f v bodě $[x_0, y_0, f(A)]$ je rovina

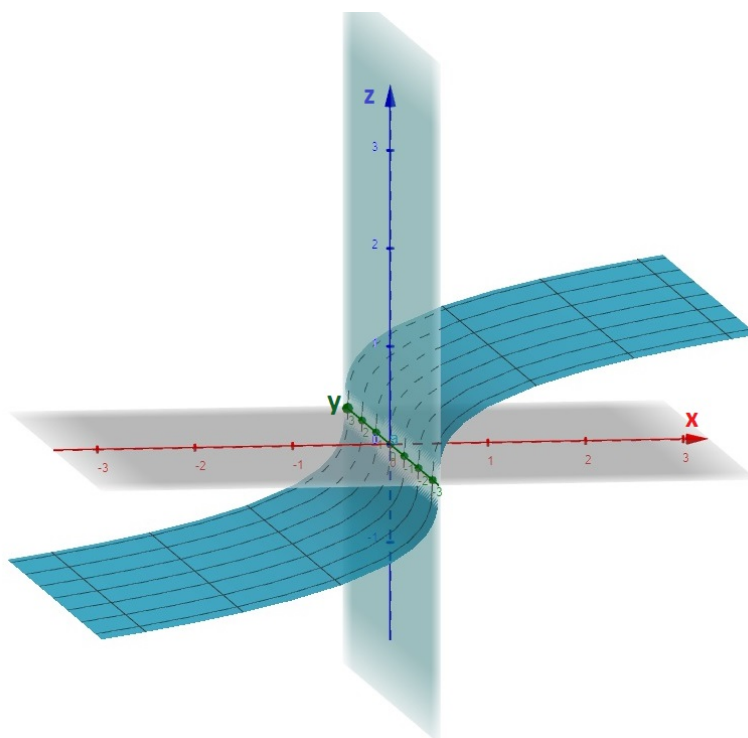
$$z = f(A) + \frac{\partial f}{\partial x}(A)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(A)(y - y_0). \quad (2.13)$$

Poznámka. Tato definice zahrnuje pouze tečné roviny, které jsou grafy funkcí proměnných x a y , tj. roviny tvaru $z = ax + by + c$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Nezahrnuje tečné roviny, které jsou rovnoběžné s rovinou $x = 0$ nebo $y = 0$.

Příklad 2.2.7. Funkce

$$f(x, y) = \sqrt[3]{x}$$

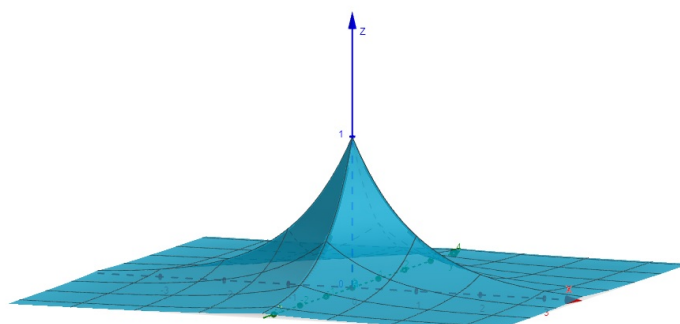
má v bodě $[0, 0, 0]$ tečnou rovinu $x = 0$.



Příklad 2.2.8. Funkce

$$f(x, y) = e^{-|x|-|y|}$$

není diferencovatelná v bodě $[0, 0, 1]$ a tedy její tečná rovina v tomto bodě neexistuje. (vypadá to, jako kdyby v tomto bodě měla jakýsi "ostrý" hrot)



Příklad 2.2.9. Najděme rovnici tečné roviny k funkci

$$f(x, y) = (y - x) \sin \frac{x}{y}$$

v bodě $A = [\pi; 2]$.

Potřebujeme tedy spočítat $f(A)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(A)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(A)$.

$$f(\pi, 2) = (2 - \pi) \sin \frac{\pi}{2} = 2 - \pi$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\sin \frac{x}{y} + (y - x) \cos \frac{x}{y} \cdot \frac{1}{y} \quad \Big|_{[\pi; 2]} = -1 + (2 - \pi) \cos \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} = -1$$

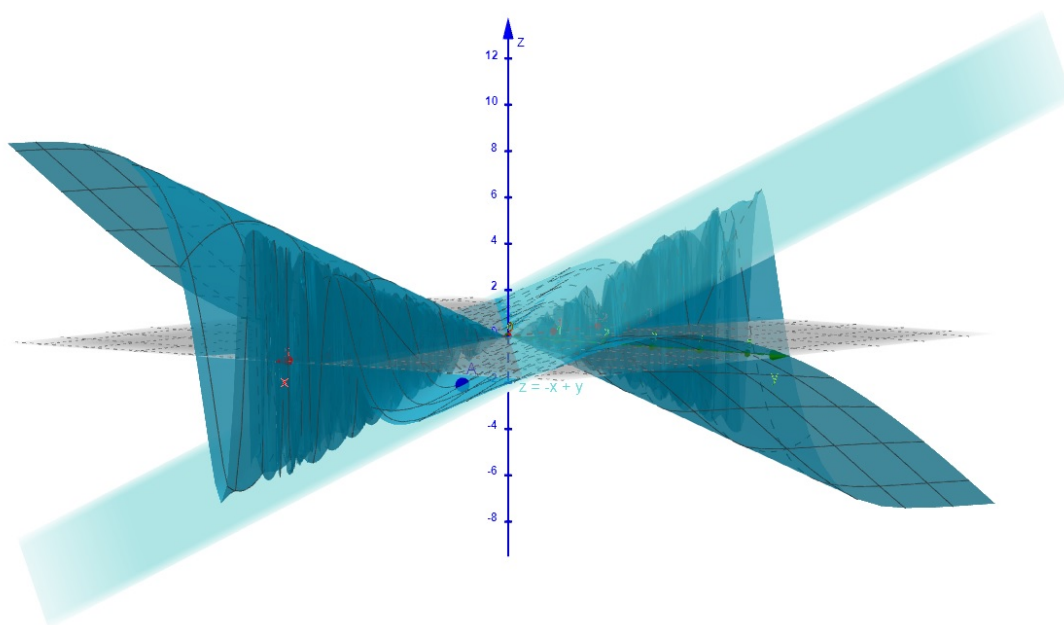
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sin \frac{x}{y} + (y - x) \cos \frac{x}{y} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) \quad \Big|_{[\pi; 2]} = 1 + (2 - \pi) \cos \frac{\pi}{2} \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

Nyní již můžeme sestavit rovnici tečné roviny:

$$z = f(A) + \frac{\partial f}{\partial x}(A)(x - \pi) + \frac{\partial f}{\partial y}(A)(y - 2) = 2 - \pi - 1 \cdot (x - \pi) + 1 \cdot (y - 2)$$

Tečná rovnice tedy je

$$z = -x + y$$



Obrázek 2.8: Graf funkce $f(x, y) = (y - x) \sin \frac{x}{y}$ a její tečné roviny $z = -x + y$

¹⁰Při výpočtu parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$ si můžete představovat, že y je konstanta (nějaké konkrétní číslo) a derivujete funkci proměnné x . (stejně tak obráceně)

Úmluva. Zápisem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

budeme rozumět smíšenou parciální derivaci, kdy funkci f nejprve derivujeme podle proměnné x a poté podle proměnné y .

Příklad 2.2.10. Je dána funkce

$$f(x, y) = x^5 y + x \sin y.$$

Vypočtěme $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 5x^4 y + \sin y.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 5x^4 + \cos y.$$

Nyní vypočtěme $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^5 + x \cos y.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 5x^4 + \cos y.$$

Člověk, který nyní poprvé parciálně derivuje ke svému překvapení zjistí, že smíšené parciální derivace vyšly stejně. To není náhoda. Platí to pro všechny "rozumné" funkce. Nyní upřesníme, co v tomto případě znamená adjektivum rozumné.

Definice 2.2.11. Nechť $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a $M \subseteq D_f$. Řekneme, že funkce f třídy C^2 na množině M a píšeme

$$f \in C^2(M),$$

pokud je spojitá na M a všechny parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

existují a jsou spojité na množině M .

Poznámka. Říkáme také, že funkce f dvakrát spojitě diferencovatelná na M .

Poznámka. V příkladu 2.2.10 může být množinou M celá rovina, tj. $M = \mathbb{R}^2$.

Věta 2.2.12 (Záměnnost smíšených parciálních derivací). Je-li $f \in C^2(M)$, pak na množině M platí:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Definice 2.2.13. Nechť $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $M \subseteq D_f$ a $k \in \mathbb{N}$. Řekneme, že funkce f třídy C^k na množině M a píšeme

$$f \in C^k(M),$$

pokud všechny parciální derivace až do řádu k včetně existují a jsou spojité na množině M .

Připomeňme si tzv. **Pascalův trojúhelník** - každé číslo v tomto trojúhelníku je součtem dvou čísel nad ním.

$$\begin{array}{ccccccc}
 n = 0 & & & & & & 1 \\
 n = 1 & & & & 1 & & 1 \\
 n = 2 & & & 1 & 2 & 1 & \\
 n = 3 & & 1 & 3 & 3 & 1 & \\
 n = 4 & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
 n = 5 & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
 n = 6 & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1
 \end{array}$$

I když to na první pohled nemusí být zřejmé, k -té číslo v n -tém řádku Pascalova trojúhelníku je zároveň kombinačním číslem

$$\binom{n}{k}$$

Připomeňme, že toto číslo udává počet kombinací bez opakování k -té třídy z n prvků a vypočteme jej jako $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$. Čísla v n -tém řádku Pascalova trojúhelníku jsou zároveň koeficienty v binomickém rozvoji

$$(A + B)^n$$

Pro $n = 0$ je

$$(A + B)^0 = 1$$

Pro $n = 1$ je

$$(A + B)^1 = A + B$$

Pro $n = 2$ je

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

Pro $n = 3$ je

$$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

Pro $n = 4$ je

$$(A + B)^4 = A^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3 + B^4$$

Pojďme to nyní napsat obecně pro $n \in \mathbb{N}$:

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^{n-k} B^k \quad (2.14)$$

Tomuto tvrzení říkáme **binomická věta**.

¹¹Například počet způsobů kolika může vyvolat učitel k tabuli na ústní zkoušení 3 žáky ve třídě s 20 dětmi je

$$\binom{20}{3} = \frac{20!}{3! \cdot (20-3)!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17!}{3! \cdot 17!} = 20 \cdot 19 \cdot 3 = 1140$$

Uvědomme si, že v této situaci je úplně jedno v jakém pořadí učitel bude vyvolávat žáky k tabuli nebo jak budou tito tři žáci stát u tabule vedle sebe - proto nezáleží na uspořádání prvků ve skupině a tedy se jedná o kombinace. Každý žák je samozřejmě jiný - proto prvky ve skupině se nemohou opakovat, tedy jde o kombinace bez opakování.

Tuto souvislost Pascalova trojúhelníku s kombinatorikou a zároveň s algebrou jste možná už objevili na střední škole. Nyní uvidíme souvislost s Taylorovým polynomem funkce více proměnných.

2.2.1 Taylorův polynom

Definice 2.2.14 (Totální diferenciál). Nechť funkce $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je třídy C^n na nějakém okolí bodu $A = [x_0, y_0] \in D_f$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Potom:

- Pro $n = 1$ definujeme **totální diferenciál 1. řádu** funkce f v bodě A jako

$$\mathbf{L}_{f,A}^1(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(A)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(A)(y - y_0)$$

- Pro $n = 2$ definujeme **totální diferenciál 2. řádu** funkce f v bodě A jako

$$\mathbf{L}_{f,A}^2(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)(x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A)(y - y_0)^2$$

- Pro $n = 3$ definujeme **totální diferenciál 3. řádu** funkce f v bodě A jako

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{f,A}^3(x, y) = & \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(A)(x - x_0)^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(A)(x - x_0)^2(y - y_0) + \\ & + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(A)(x - x_0)(y - y_0)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(A)(y - y_0)^3 \end{aligned}$$

- Pro obecné $n \in \mathbb{N}$ definujeme **totální diferenciál řádu n** funkce f v bodě A jako

$$\mathbf{L}_{f,A}^n(x, y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k} \partial y^k}(A)(x - x_0)^{n-k} (y - y_0)^k \quad (2.15)$$

Poznámka. Totální diferenciál n -tého řádu je tedy polynom proměnných x a y , jehož koeficienty jsou čísla v n -tém řádku Pascalova trojúhelníku.

Definice 2.2.15 (Taylorův polynom). Nechť funkce $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je třídy C^n na nějakém okolí bodu $A = [x_0, y_0] \in D_f$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Pak Taylorův polynom funkce f v bodě A je

$$\mathbf{T}_{f,A}^n(x, y) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \mathbf{L}_{f,A}^k(x, y) \quad (2.16)$$

Poznámka. Taylorův polynom 1. stupně k funkci dvou proměnných je tečná rovina. Taylorův polynom 2. stupně může být paraboloid (rotační, eliptický, hyperbolický) nebo ve speciálním případě také rovina.

Příklad 2.2.16. Spočtěme Taylorův polynom 2. stupně funkce

$$f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$$

v bodě $A = [0, 0]$.

Potřebujeme tedy spočítat $f(A)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(A)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(A)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A)$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A)$.

$$f(0, 0) = e^0 = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -2x e^{-x^2-y^2} \Big|_{[0;0]} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y e^{-x^2-y^2} \Big|_{[0;0]} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 4xy e^{-x^2-y^2} \Big|_{[0;0]} = 0$$

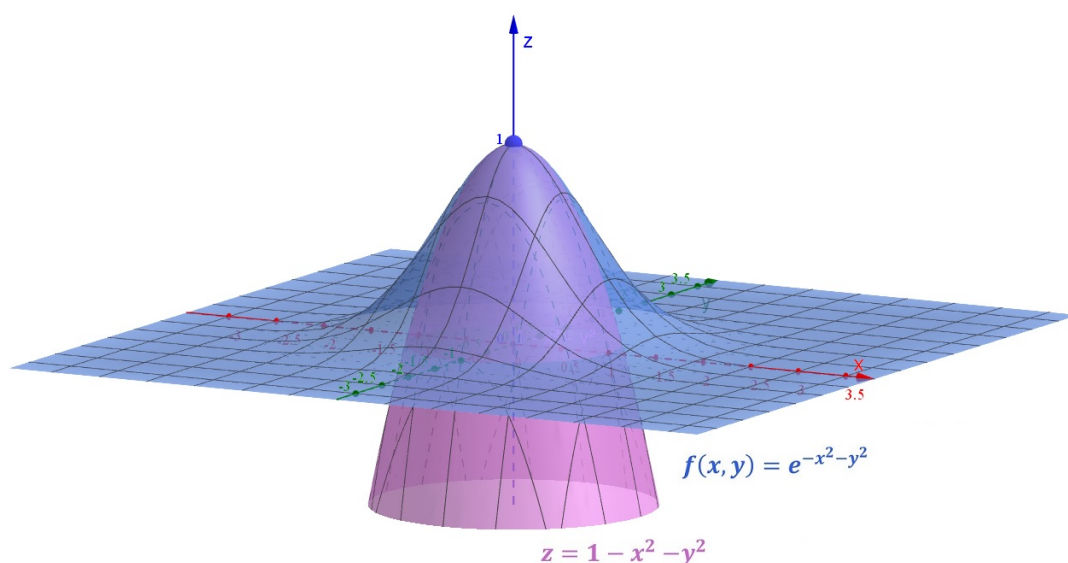
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -2 e^{-x^2-y^2} + 4x^2 e^{-x^2-y^2} \Big|_{[0;0]} = -2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -2 e^{-x^2-y^2} + 4y^2 e^{-x^2-y^2} \Big|_{[0;0]} = -2$$

Hledaný Taylorův polynom tedy je:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{f,A}^2(x, y) &= f(A) + \frac{\partial f}{\partial x}(A)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(A)(y - y_0) + \\ &+ \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) (x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) (x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) (y - y_0)^2 \right) = \\ &= 1 + 0x + 0y + \frac{1}{2!}(-2x^2 + 0xy - 2y^2) = 1 - x^2 - y^2 \end{aligned}$$

Tedy lineární aproximací funkce f v bodě $[0, 0]$ je tečná rovina $z = 0$; kvadratickou aproximací je tečný paraboloid $z = 1 - x^2 - y^2$.



Obrázek 2.9: Graf funkce $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$

Pojďme ještě spočítat Taylorův polynom 3. stupně. Ten bude mít tvar

$$\mathbf{T}_{f,A}^3(x, y) = f(A) + \mathbf{L}_{f,A}^1(x, y) + \frac{1}{2!} \mathbf{L}_{f,A}^2(x, y) + \frac{1}{3!} \mathbf{L}_{f,A}^3(x, y)$$

Totální diferenciál 1. a 2. řádu již známe. Potřebujeme tedy ještě spočítat třetí parciální derivace

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(A), \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(A), \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(A), \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(A),$$

abychom mohli sestavit totální diferenciál 3. řádu.

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x, y) = 4x e^{-x^2-y^2} - 8xy e^{-x^2-y^2} \Big|_{[0;0]} = 0$$

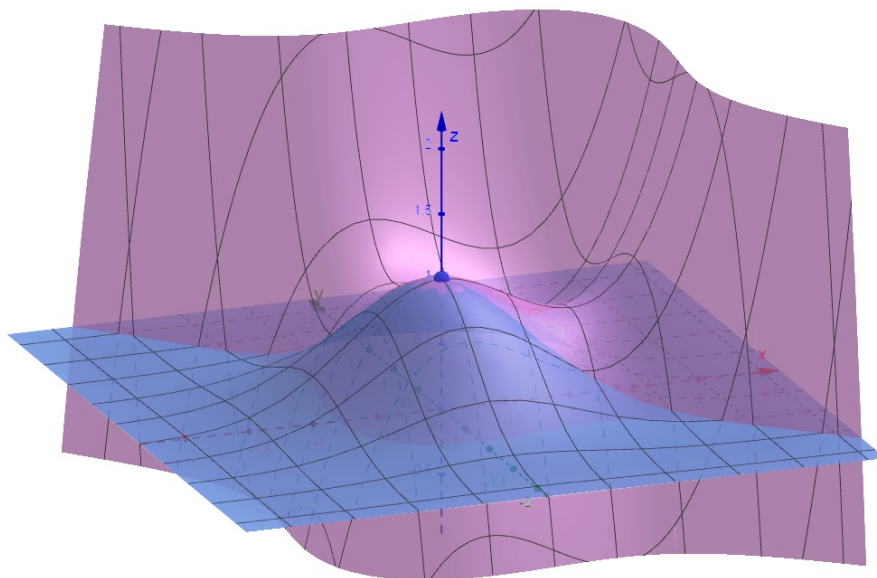
$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(x, y) = 4y e^{-x^2-y^2} - 8xy e^{-x^2-y^2} \Big|_{[0;0]} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^3}(x, y) = 4x e^{-x^2-y^2} + 4e^{-x^2-y^2} - 8x^2 e^{-x^2-y^2} \Big|_{[0;0]} = 4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^3}(x, y) = 4y e^{-x^2-y^2} + 4e^{-x^2-y^2} - 8y^2 e^{-x^2-y^2} \Big|_{[0;0]} = 4$$

Tedy Taylorův polynom 3. stupně je

$$\mathbf{T}_{f,A}^3(x, y) = 1 - x^2 - y^2 + \frac{1}{3!}(4x^3 + 0x^2y + 0xy^2 + 4y^3) = 1 - x^2 - y^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}y^3$$



Obrázek 2.10: Taylorův polynom 3. stupně $z = 1 - x^2 - y^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}y^3$

2.2.2 Derivace ve směru

Parciální derivace funkce $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ podle i -té proměnné x_i

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)$$

udává rychlost změny funkčních hodnot ve směru vektoru $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, kde jednička je na i -tém místě. Speciálně, pro funkci dvou proměnných $\frac{\partial f}{\partial x}$ udává rychlost změny funkčních hodnot ve směru vektoru $(1, 0)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$ udává rychlost změny funkčních hodnot ve směru vektoru $(0, 1)$. Někdy bychom ale mohli být v situaci, kdyby nás zajímala rychlost změny funkčních hodnot v nějakém jiném směru.

Definice 2.2.17 (Derivace ve směru). Derivaci funkce $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ v bodě $A \in D_f$ ve směru vektoru $\vec{u}$ definujeme vztahem

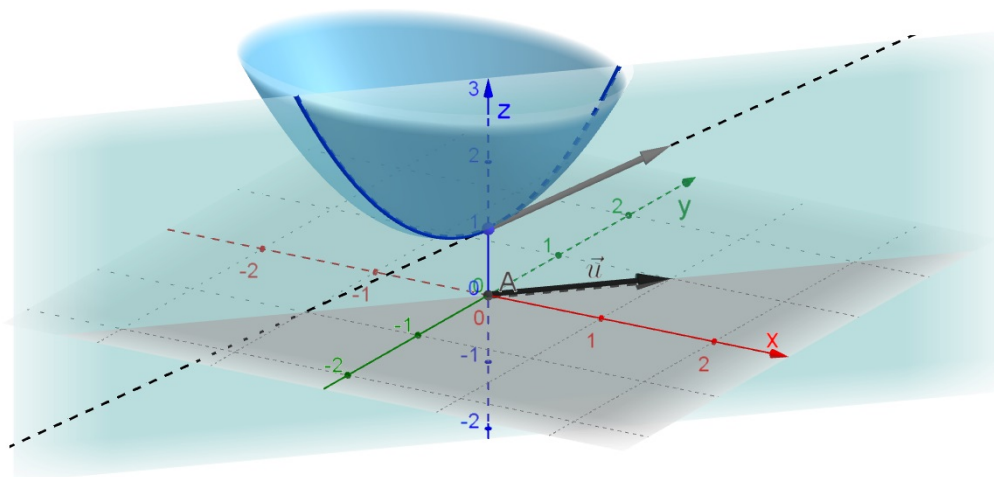
$$Df(A, \vec{u}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(A + t\vec{u}) - f(A)}{t} \quad (2.17)$$

Příklad 2.2.18. Spočtěme derivaci funkce

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 + x + 1$$

v bodě $A = [0; 0]$ ve směru vektoru $\vec{u} = (1, 1)$

$$\begin{aligned} Df(A, \vec{u}) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0,0) + t(1,1)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t,t) - f(0,0)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 + 2t^2 + t + 1 - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3t^2 + t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} (3t + 1) = 1 \end{aligned}$$



Obrázek 2.11: Derivace funkce f v bodě A ve směru vektoru $\vec{u}$

Derivace funkce f v bodě A ve směru vektoru $\vec{u}$ tedy udává směrnici tečny ke grafu funkce jedné proměnné, která vznikne řezem grafu funkce f rovinou určenou bodem A a vektorem $\vec{u}$ kolmou na rovinu $z = 0$ - jako bychom si vytvořili nový souřadnicový systém $x'z$ s počátkem v bodě A , přičemž za kladný směr osy x' považujeme směr vektoru $\vec{u}$ a v tomto souřadnicovém systému spočítali derivaci funkce jedné proměnné.

V jednoduchých případech jako je tento můžeme počítat derivaci funkce ve směru přímo z definice. Výpočet limity (2.17) může být ale početně náročný. Proto budeme v početních příkladech spíše využívat následujícího tvrzení.

Tvrzení 2.2.19. *Nechť funkce $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je třídy $\mathbf{C}^1$ na nějaké otevřené množině $G \subseteq D_f$, $n \in \mathbb{N}$. Derivace funkce f v bodě $A \in G$ ve směru vektoru $\vec{u}$ je*

$$Df(A, \vec{u}) = \nabla f(A) \cdot \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$$

Tedy derivaci ve směru **jednotkového vektoru** lze počítat jako skalární součin tohoto vektoru a gradientu funkce f v bodě A .

Příklad 2.2.20. Spočtěme derivaci funkce

$$f(x, y) = \frac{y^2}{x}$$

v bodě $A = [-1, 1]$ ve směru vektoru $\vec{u} = (-1, -3)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= -\frac{y^2}{x^2} \Big|_{[-1; 1]} = -1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{2y}{x} \Big|_{[-1; 1]} = -2 \end{aligned}$$

Tedy gradient funkce f v bodě A je vektor

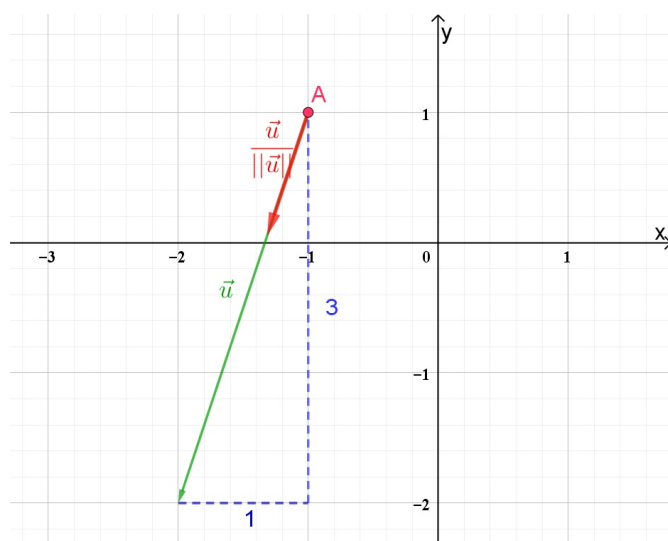
$$\nabla f(A) = (-1, -2).$$

Norma vektoru $\vec{u}$ je

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}.$$

Tedy derivace f v bodě A ve směru jednotkového vektoru $\vec{u}$ je

$$Df(A, \vec{u}) = \nabla f(A) \cdot \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = (-1, -2) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{6}{\sqrt{10}} = \frac{7}{\sqrt{10}}$$



¹¹Uvědomme si, že velikost vektoru počítáme jako délku přepony v nějakém pravoúhlém trojúhelníku.

Podobně jako v pro funkci jedné proměnné můžeme Taylorův polynom funkce dvou proměnných k výpočtu přibližné hodnoty funkce v nějakém bodě. Myšlenka je stejná: najdeme Taylorův polynom nějaké funkce v určitém bodě, ve kterém ji dovedeme vyčíslit a dovedeme zde vyčíslit i její derivace, který je zároveň "blízko" bodu, v němž chceme danou funkční hodnotu aproximovat.

Příklad 2.2.21. Spočtíme přibližnou hodnotu

$$1,03^{0,98}$$

pomocí Taylorova polynomu 2. stupně funkce

$$f(x, y) = x^y.$$

Neumím je vyčíslit v bodě $[1,03; 0,98]$, ale umíme ji vyčíslit v bodě $[1; 1]$, který je od něj blízko. Pojďme tedy najít Taylorův polynom této funkce v bodě $A = [1; 1]$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= yx^{y-1} \Big|_{[1; 1]} = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= x^y \ln x \Big|_{[1; 1]} = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = yx^{y-1} \ln x + x^y \frac{1}{x} \Big|_{[1; 1]} = 1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= y(y-1)x^{y-2} \Big|_{[1; 1]} = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= x^y (\ln x)^2 \Big|_{[1; 1]} = 0\end{aligned}$$

Tedy Taylorův polynom 2. stupně funkce f v bodě $[1, 1]$ je

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_{f,A}^2(x, y) &= f(A) + \frac{\partial f}{\partial x}(A)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(A)(y - y_0) + \\ &+ \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) (x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) (x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) (y - y_0)^2 \right) = \\ &= 1 + 1(x - 1) + \frac{1}{2!} 2 \cdot 1 \cdot (x - 1)(y - 1) = x + (x - 1)(y - 1)\end{aligned}$$

Pojďme ho vyčíslit v bodě $[1,03; 0,98]$.

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_{f,A}^2(1,03, 0,98) &= 1,03 + (1,03 - 1)(0,98 - 1) = 1,03 + 0,03 \cdot (-0,02) = \\ &= 1,03 - 0,0006 = 1,0294\end{aligned}$$

Tedy naše aproximace je

$$1,03^{0,98} \approx 1,0294,$$

přičemž chyba, které se dopustíme je

$$|1,03^{0,98} - \mathbf{T}_{f,A}^2(1,03, 0,98)| \doteq |1,02939 - 1,0294| = 0,00001 = 10^{-5}$$

2.2.3 Příklady k procvičení

Příklad 2.2.22. Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce

$$f(x, y) = x^2 + y^3 + 2$$

v bodě $A = [1; 1]$.

Příklad 2.2.23. Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce

$$f(x, y) = \frac{e^{3x}}{x^2 + xy + y^2}$$

v bodě $A = [0; 1]$.

Příklad 2.2.24. Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce

$$f(x, y) = \ln \frac{xy}{x + y},$$

aby byla rovnoběžná s rovinou $x + y - 2z + 3 = 0$.

Příklad 2.2.25. Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce

$$f(x, y) = \operatorname{arccotg} \frac{x}{1 + \sqrt{y}},$$

aby byla kolmá na přímkou procházející body $[2, 3, 7]$ a $[1, 3, 4]$.

Příklad 2.2.26. Určete Taylorův polynom 3. stupně funkce

$$f(x, y) = \frac{1}{(1 - x)(1 - y)}$$

v bodě $A = [0; 0]$

Příklad 2.2.27. Pomocí vhodně zvoleného Taylorova polynomu 2. stupně ve vhodně zvoleném bodě spočtěme přibližnou hodnotu

$$3e^{0,02} \ln 0,95$$

Výsledky

$$2.2.22. \quad z - 4 = 2(x - 1) + 3(y - 1)$$

$$2.2.23. \quad 2x - 2y - z + 3 = 0$$

$$2.2.24. \quad x + y - 2z - 2 - 2 \ln 2 = 0$$

$$2.2.25. \quad x + 3z - \frac{3}{2}\pi = 0$$

$$2.2.26. \quad \mathbf{T}_{f,A}^3(x, y) = 1 + x + y + x^2 + xy + y^2 + x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$$

2.2.27. Aproximace pomocí Taylorova polynomu funkce $f(x, y) = 3e^x \ln y$ v bodě $[0; 1]$ je přibližně $-0,15675$.

3. Lineární a afinní zobrazení

3.1 Lineární zobrazení

Připomeňme si následující základní pravidla, která používáme při derivování, při integrování nebo třeba při výpočtu limit.

- Derivace součtu funkcí je součet jejich derivací a zároveň multiplikativní konstantu můžeme vytýkat před derivaci, tedy

$$(af(x) + bg(x))' = a f'(x) + b g'(x)$$

- Integrál součtu funkcí je součet integrálů těchto funkcí a zároveň multiplikativní konstantu můžeme vytýkat před integrál, tedy

$$\int (af(x) + bg(x)) dx = a \int f(x) dx + b \int g(x) dx$$

- Limitu součtu posloupností lze počítat jako součet limit těchto posloupností, má-li pravá strana rovnosti smysl a zároveň multiplikativní konstantu můžeme vytýkat před limitu, tedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c a_n + d b_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + d \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n,$$

přičemž pravá strana rovnosti má smysl vždy, pokud nevyjde $\infty - \infty$, což považujeme za neurčitý výraz (to je tedy jediné "nebezpečí", které hrozí).

Těmto vlastnostem říkáme linearita.

Definice 3.1.1 (Lineární zobrazení). Nechť $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbf{T}$. Řekneme, že zobrazení $L : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ je lineární, pokud splňuje:

$$\forall t \in \mathbf{T} \quad \forall x \in \mathbf{X} \quad L(tx) = tL(x) \tag{3.1}$$

$$\forall x, y \in \mathbf{X} \quad L(x + y) = L(x) + L(y) \tag{3.2}$$

Poznámka. Vlastnost (3.1) nazýváme homogenita a vlastnost (3.2) aditivita.

Příklady

- Zobrazení $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definované předpisem

$$L(x) = 2x$$

je lineární zobrazení, neboť splňuje pro každé $t \in \mathbb{R}$ a $x, y \in \mathbb{R}$:

$$L(tx) = 2 \cdot tx = t 2x = tL(x)$$

$$L(x + y) = 2(x + y) = 2x + 2y = L(x) + L(y)$$

- Zobrazení $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definované předpisem

$$L(x) = 2x + 1$$

není lineární zobrazení, neboť

$$L(x + y) = 2(x + y) + 1 = 2x + 2y + 1 \neq L(x) + L(y) = 2x + 1 + 2y + 1$$

Zde se dostáváme do kolize se středoškolskou terminologií, kdy jsme lineární funkci nazývali funkcí ve tvaru $f(x) = ax + b$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Pouze pro $b = 0$ jde ale o lineární zobrazení. Pro $b \neq 0$ takové zobrazení nazýváme afinní.

- Zobrazení $L : \mathbf{C}^1(I) \rightarrow \mathbf{C}(I)$ přiřazující funkci f její derivaci f' , tedy zobrazení definované předpisem

$$L(f) = f'$$

je lineární, neboť pro všechna čísla $t \in \mathbb{R}$ a diferencovatelné funkce f, g na intervalu I platí

$$L(tf) = (tf)' = t f' = t L(f)$$

$$L(f + g) = (f + g)' = f' + g' = L(f) + L(g)$$

- Zobrazení $L : X \rightarrow \mathbb{R}$ přiřazující **konvergentní** posloupnosti a_n její limitu $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, tedy zobrazení definované předpisem

$$L(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n,$$

kde

$$X = \left\{ a_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}; \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ existuje a je konečná} \right\},$$

je lineární zobrazení, neboť pro libovolné posloupnosti a_n, b_n a pro všechna čísla $t \in \mathbb{R}$ platí

$$L(ta_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (ta_n) = t \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = t L(a_n)$$

$$L(a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L(a_n) + L(b_n)$$

- Zobrazení $L : X \rightarrow \mathbb{R}^*$ přiřazující posloupnosti a_n její limitu $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, tedy zobrazení definované předpisem

$$L(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n,$$

kde

$$X = \left\{ a_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}; \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ existuje} \right\},$$

není lineární zobrazení. Například pro posloupnosti $a_n = n^2$ a $b_n = -n$ je

$$L(a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \infty (1 - 0) = +\infty,$$

ale

$$L(a_n) + L(b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 + \lim_{n \rightarrow \infty} (-n) = \infty - \infty,$$

tedy pravá strana rovnosti nemá smysl, neboť $\infty - \infty$ je neurčitý výraz, tj.

$$L(a_n + b_n) \neq L(a_n) + L(b_n)$$

¹²O posloupnosti říkáme, že je **konvergentní**, pokud má konečnou limitu. V opačném případě ji nazýváme **divergentní**. Například posloupnost $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$, tedy $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ má limitu 0 a tedy je konvergentní. Posloupnost $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$, tedy $1, 4, 9, 16, \dots$, má limitu $+\infty$ a tedy je divergentní.

Nyní se budeme zabývat především lineárními zobrazeními mezi eukleidovskými prostory. Ty lze charakterizovat následujícím způsobem.

Tvrzení 3.1.2. *Zobrazení $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ je lineární právě tehdy, když existuje matice $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ tak, že pro každý vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$ platí*

$$L(\vec{x}) = A\vec{x}.$$

Matice A má tedy m sloupců a n řádků a její prvky jsou reálná čísla. Takové zobrazení zobrazuje m -složkový vektor na n -složkový vektor. Linearita zobrazení L přímo plyne z distributivity a asociativity maticového násobení.

Každá matice, jejíž prvky jsou reálná čísla, tedy jednoznačně určuje lineární zobrazení a naopak každé lineární zobrazení mezi eukleidovskými prostory je tedy jednoznačně určeno takovou maticí. Přitom matice každého lineárního zobrazení

$$L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

je jednoznačně určena m -ticí obrazů a vektorů libovolné báze prostoru $\mathbb{R}^m$.

Příklad 3.1.3. Určeme matici otočení $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ kolem bodu $[0; 0]$ o úhel 90° proti směru hodinových ručiček.

Takové zobrazení je lineární, tedy hledáme matici řádu 2 takovou, že

$$L(\vec{x}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \vec{x}.$$

Stačí zvolit dvojici obrazů a vektorů libovolné báze roviny. Tak třeba vektory $(1,0)^T$ a $(0,1)^T$ tvoří bázi $\mathbb{R}^2$ (neboť jsou to lineárně nezávislé vektory a generují celý prostor $\mathbb{R}^2$, tj. každý vektor v rovině lze vyjádřit jako jejich lineární kombinace). Vektor $(1,0)^T$ se při tomto otočení zobrazí na vektor $(0,1)^T$ a vektor $(0,1)^T$ se zobrazí na vektor $(-1,0)^T$. Tedy

$$L((1,0)^T) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$L((0,1)^T) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tedy ihned získáváme, že $a = 0$, $c = 1$, $b = -1$ a $d = 0$. Tedy otočení o 90° proti směru hodinových ručiček je zobrazení

$$L(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}$$

Poznámka. Takových zobrazení $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, které splňují

$$L((1,0)^T) = (0,1)^T$$

$$L((0,1)^T) = (-1,0)^T$$

je nekonečně mnoho. Jen jedno z nich je ale lineární - a to je právě ono otočení o 90° proti směru hodinových ručiček kolem počátku souřadnicového systému, jehož matici jsme nyní našli. Například zobrazení

$$L(x, y) = (-y, x^2)$$

také zobrazuje vektor $(1,0)$ na $(0,1)$ a vektor $(0,1)$ na $(-1,0)$, tedy rovněž splňuje tyto podmínky, ale není lineární.

Příklady:

- Matice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ je maticí identického zobrazení, které "neudělá nic".
- Matice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ je maticí osově souměrnosti podle osy y . (zobrazení zachová y -ovou souřadnici vzoru a změni znaménko x -ové souřadnice)
- Matice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ je maticí osově souměrnosti podle osy x . (zobrazení zachová x -ovou souřadnici vzoru a změni znaménko y -ové souřadnice)
- Matice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ lze zapsat jako součin dvou matic

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a je tedy složením dvou zobrazení - osově souměrnosti podle osy x a osově souměrnosti podle osy y . Složením těchto dvou osových souměrností je otočení o 180° .

- Matice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ je maticí projekce na osu x .
- Matice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ je maticí projekce na osu y .
- Matice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ je maticí lineárního zobrazení, které "natáhne" rovinný útvar dvakrát v ose x a třikrát v ose y . (jednotkovou kružnici zobrazí na elipsu s délkami poloos 2 a 3)
- Matice $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ je maticí otočení o úhel α proti směru hodinových ručiček kolem bodu $[0,0]$.
- Matice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ určuje lineární zobrazení, o kterém však na první pohled neumíme říct "co dělá". Tato matice je ve skutečnosti součinem matic

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tedy lineární zobrazení určené touto maticí je složením dvou lineárních zobrazení - zvětšením ($\frac{2}{\sqrt{2}}$ -krát) a otočením o úhel $\frac{\pi}{4}$, tedy 45° proti směru hodinových ručiček.

3.2 Afinity zobrazení

Lineární zobrazení mezi eukleidovskými prostory zahrnují například všechna otočení, zvětšení či zmenšení, zkosení, projekce, zrcadlení atd., a samozřejmě také složení libovolných dvou lineárních zobrazení. Připustíme-li navíc **posunutí**, pak mluvíme o afinity zobrazení.

Definice 3.2.1 (Afinity zobrazení). Řekneme, že zobrazení $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ je afinity právě tehdy, když existuje matice $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ a vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ tak, že pro každý vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$ platí

$$L(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{b}.$$

Afinity zobrazení je tedy **složením lineárního zobrazení a posunutí**.

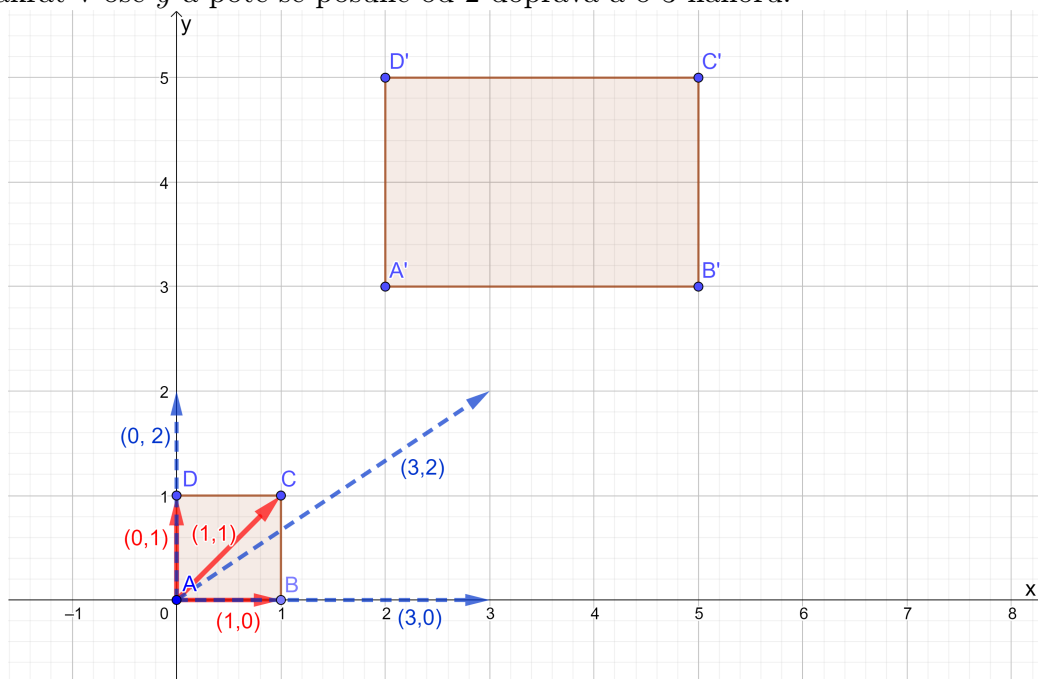
Příklad 3.2.2. Najděme předpis afinity zobrazení $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, které zobrazí čtverec $ABCD$ s vrcholy

$$A = [0, 0], B = [1, 0], C = [0, 1], D = [1, 1]$$

na obdélník $A'B'C'D'$ s vrcholy

$$A' = [2, 3], B' = [5, 3], C' = [5, 5], D' = [2, 5]$$

Jedna možnost je situaci si zakreslit a chápat toto zobrazení jako složené z lineárního zobrazení a posunutí - nejprve se daný čtverec třikrát protáhne v ose x a dvakrát v ose y a poté se posune od 2 doprava a o 3 nahoru.



Dané zobrazení je tedy dáno předpisem

$$L(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Pokud by to však na první pohled nebylo vidět, postupovali bychom následujícím způsobem: Dané zobrazení budeme hledat ve tvaru

$$L(\vec{x}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix},$$

přičemž má splňovat

$$L((1,0)^T) = (5,3)^T$$

$$L((1,1)^T) = (5,5)^T$$

$$L((0,1)^T) = (2,5)^T$$

Tedy máme tři dvojice obrazů a vzorů, z nichž dva vzory jsou bázové vektory $\mathbb{R}^2$. Tím je toto afinní zobrazení jednoznačně určeno. Tedy

$$L((1,0)^T) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e \\ c+f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$L((1,1)^T) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+e \\ c+d+f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$L((0,1)^T) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+e \\ d+f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

To tedy vede na soustavu 6 lineárních rovnic o 6 neznámých a, b, c, d, e, f , kterou jistě dovedeme vyřešit.

Definice 3.2.3 (Afinita). Afinní zobrazení $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dané vztahem

$$L(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{b}$$

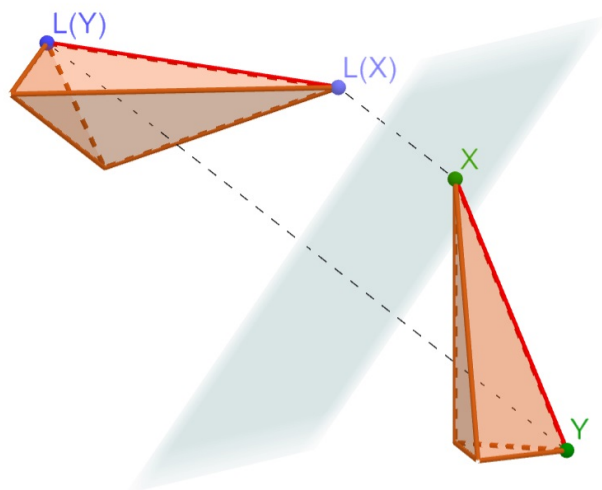
je **afinita**, pokud je matice A regulární.

3.2.1 Shodná zobrazení

V dalším textu budeme mluvit o shodných a podobných zobrazeních v rovině či v prostoru. Budeme-li zapisovat $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, uvažujeme pouze případy $n = 2$ nebo $n = 3$.

Definice 3.2.4 (Shodnost - syntetická definice). Zobrazení $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ nazýváme shodnost, pokud vzdálenost libovolných dvou bodů $X, Y \in \mathbb{R}^n$ je stejná jako vzdálenost jejich obrazů $L(X)$ a $L(Y)$. Tedy

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}^n : |XY| = |L(X)L(Y)|$$



Obrázek 3.1: Rovinná souměrnost $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

Shodnost je tedy zobrazení zachovávající vzdálenosti (metriku). Taková zobrazení obecně nazýváme **izometrie**. Shodnost je izometrie v Eukleidovském prostoru.

K syntetické definici shodnosti jsme nepotřebovali souřadnicový systém. Nyní popíšeme shodnost analyticky. O dvou rovinných či prostorových útvarech umístěných do souřadnicového systému řekneme, že jsou shodné, pokud mezi nimi existuje afinní zobrazení, které má následující vlastnost.

Definice 3.2.5 (Shodnost - analytická definice). Řekneme, že afinní zobrazení

$$L(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{b}$$

je shodnost, pokud matice A splňuje

$$A^T A = A A^T = I, \quad (3.3)$$

kde I značí jednotkovou matici a A^T matici transponovanou.

Shodnosti mohou být otočení, zrcadlení, posunutí a libovolné jejich složení.

Tvrzení 3.2.6. *Je-li afinní zobrazení $L(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{b}$ shodnost, pak*

$$\det A = 1 \quad \text{nebo} \quad \det A = -1$$

Důkaz. Matice shodného zobrazení splňuje vztah (3.3), tedy

$$A^T A = I$$

$$\det(A^T A) = \det I$$

Využitím věty o determinantu součinu $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ dostaneme

$$\det A^T \cdot \det A = 1,$$

a protože transponování matice nemění determinant, tj. $\det A^T = \det A$, máme

$$(\det A)^2 = 1,$$

$$\det A = \pm 1.$$

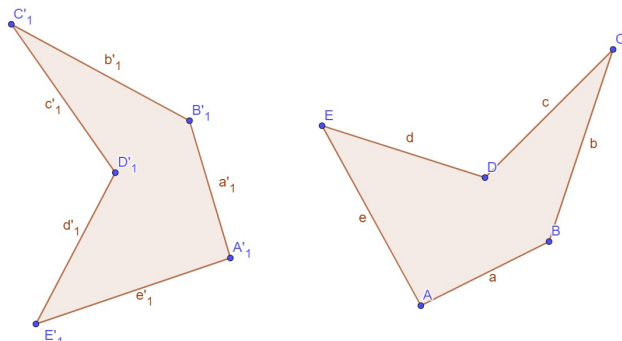
□

Přímá a nepřímá shodnost

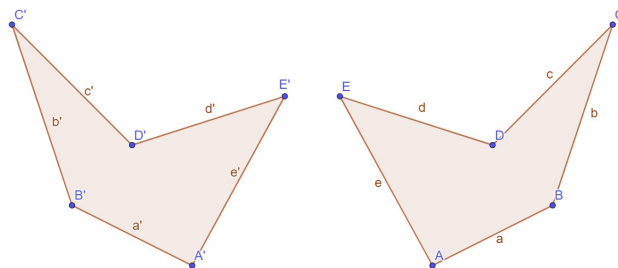
O dvou rovinných útvarech řekneme, že jsou **přímo shodné**, pokud je možné je v rovině přemístit tak, aby se úplně překrývaly. Toto "přemístění" může být tedy libovolné posunutí a otočení původního objektu. Pokud bychom navíc museli obrazec vystříhnout z papíru, zvednout a překlomit, jednalo by se o **nepřímou shodnost**. Při přímé shodnosti se zachová orientace ("pořadí vrcholů ve směru obíhání"), kdežto při nepřímé shodnosti se změní orientace. To souvisí se znaménkem determinantu.

Definice 3.2.7. Shodné zobrazení $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tvaru $L(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{b}$ je

- **přímá shodnost**, pokud $\det A = +1$
- **nepřímá shodnost**, pokud $\det A = -1$



Obrázek 3.2: Přímá shodné rovinné útvary

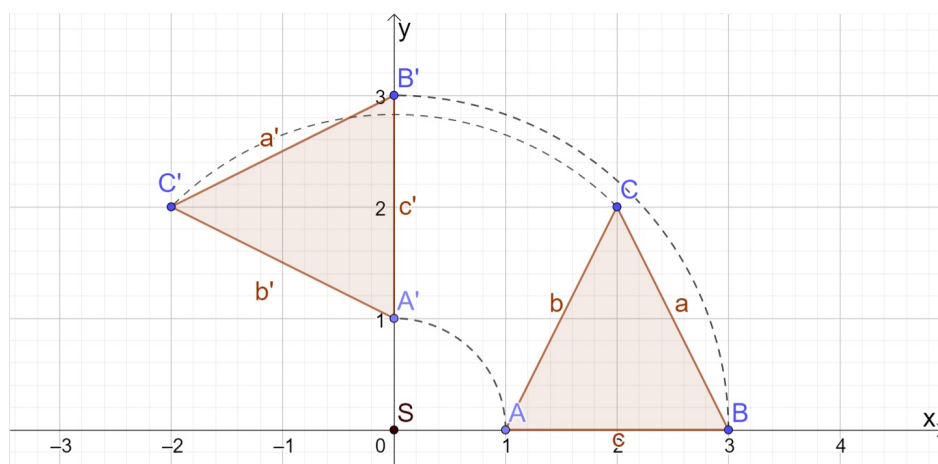


Obrázek 3.3: Nepřímá shodné rovinné útvary

Příklad 3.2.8. Trojúhelníky ABC s vrcholy $A = [1, 0]$, $B = [3, 0]$, $C = [2, 2]$ a $A'B'C'$ s vrcholy $A' = [0, 1]$, $B' = [0, 3]$, $C' = [-2, 2]$ jsou přímo shodné. Zobrazení, které trojúhelník ABC zobrazí na trojúhelník $A'B'C'$ je otočení o 90° proti směru hodinových ručiček kolem bodu $[0, 0]$ a má předpis

$$L(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}$$

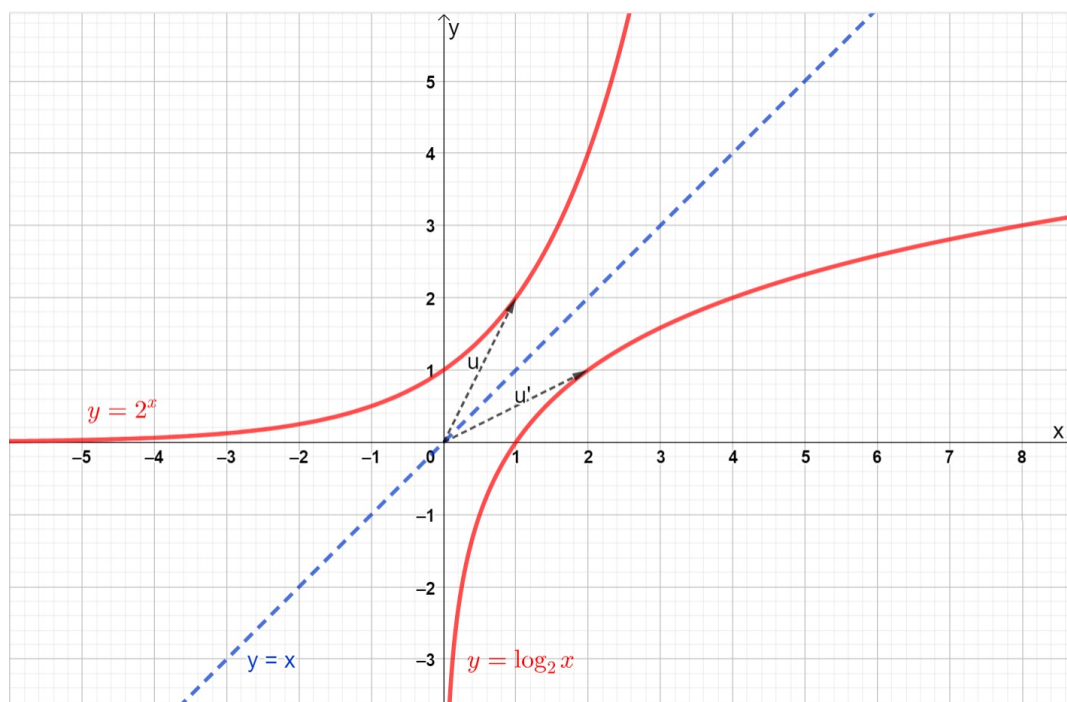
Determinant této matice je roven $+1$.



Příklad 3.2.9. Grafy funkcí $y = 2^x$ a $y = \log_2 x$ jsou nepřímě shodné rovinné křivky. Existuje tedy nepřímě shodné zobrazení $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, které zobrazí tuto exponenciálu na tuto logaritmickou křivku. Toto zobrazení má předpis

$$L(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}$$

neboli $L(x, y) = (y, x)^T$ a jde o osovou souměrnost podle přímky $y = x$.



Jinými slovy, obrazem rovinné křivky $\varphi(t) = (t, 2^t)$ je křivka

$$L(t, 2^t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 2^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^t \\ t \end{pmatrix}$$

tedy křivka daná rovnicí

$$x = 2^y,$$

neboli graf logaritmické funkce

$$y = \log_2 x.$$

Determinant této matice je $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$, tedy vidíme, že jde o nepřímou shodnost.

Ověřme si například, že obraz vektoru $(1, 2)^T$ je vektor $(2, 1)^T$:

$$L(1, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

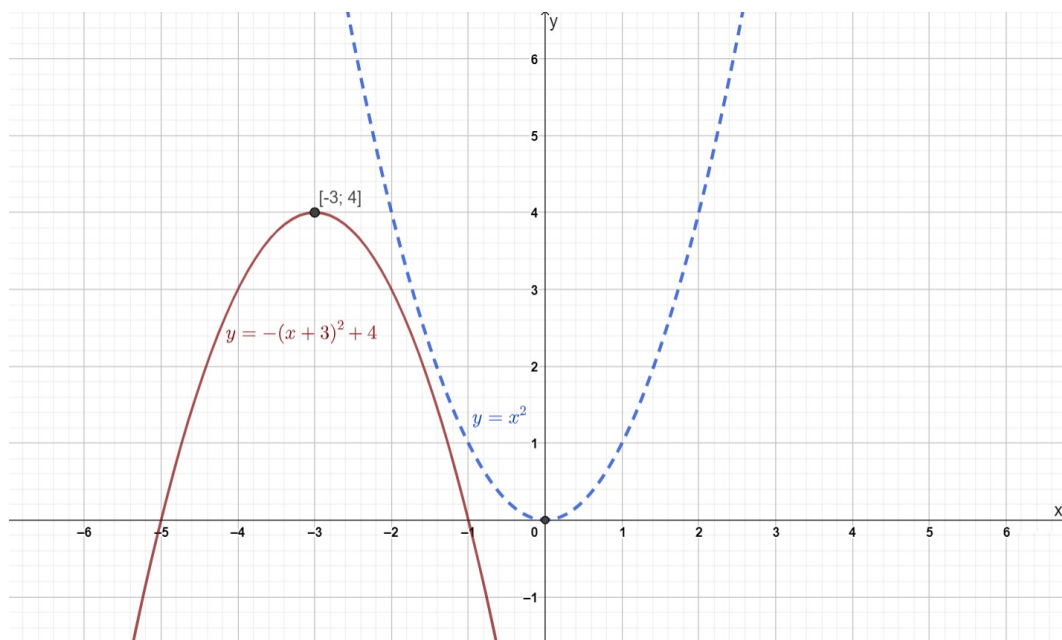
¹⁰Uvědomme si, že grafy jakýchkoliv dvou navzájem inverzních funkcí jsou nepřímě shodné křivky. Zobrazení $L(x, y) = (y, x)^T$ vlastně "prohodí" x a y - to je to, co děláme při určování předpisu inverzní funkce. Zaměníme x a y a následně vyjádříme y .

Příklad 3.2.10. Najděme předpis zobrazení $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, které zobrazí parabolu

$$y = x^2$$

na parabolu

$$y = -(x + 3)^2 + 4.$$



Tato parabola může "vzniknout" ze základní paraboly $y = x^2$ dvěma způsoby: buďto parabolu $y = x^2$ nejprve otočíme o 180° a poté ji posuneme o 3 doleva a o 4 nahoru - v takovém případě jde o složení otočení a posunutí, tedy jedná se o přímou shodnost a takové zobrazení má předpis

$$L(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

nebo se nejprve provede osová souměrnost podle osy x a poté se parabola posune - v takovém případě jde o nepřímou shodnost a toto zobrazení má předpis

$$L(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

V prvním případě je determinant této matice $+1$ a ve druhém případě je determinant matice -1 .

Obecně bychom předpis takového zobrazení hledali ve tvaru

$$L(\vec{x}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Uvažujeme-li složení osově souměrnosti a posunutí, pak lze volit například následující trojici obrazů a vzorů: Vrchol paraboly se opět musí zobrazit na vrchol, tedy $L(0,0) = (-3,4)^T$. Dále třeba $L(1,1) = (-2,3)^T$ a $L(-1,1) = (-4,3)^T$. To vede na soustavu 6 lineárních rovnic s neznámými a, b, c, d, e, f .

Skládání shodností

Jsou-li $L_A, L_B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ shodná zobrazení tvaru

$$L_A(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{b}$$

$$L_B(\vec{x}) = B\vec{x} + \vec{c},$$

pak složené zobrazení $L_A \circ L_B$ je shodnost určená maticí $A \cdot B$ a nějakým vektorem posunutí. Z věty o determinantu součinu

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

ihned plyne následující tvrzení:

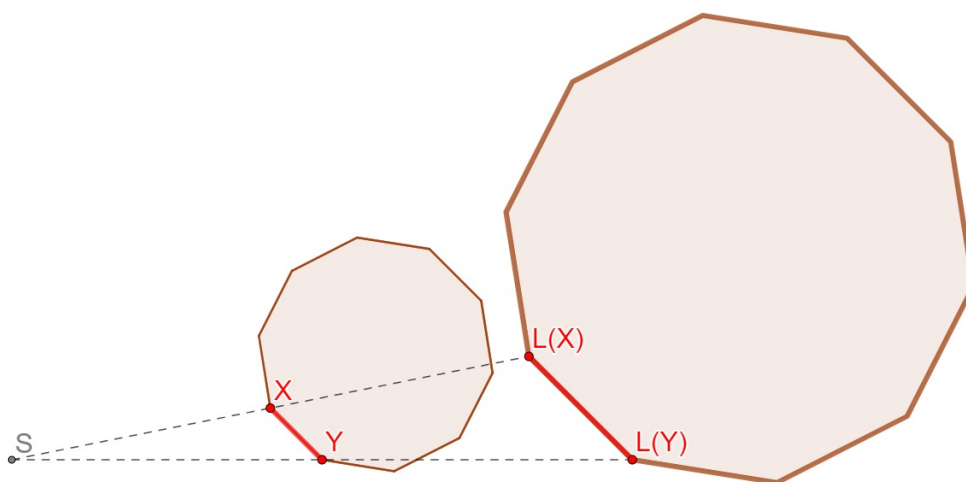
- Složení dvou přímých shodností je přímá shodnost.
- Složení dvou nepřímých shodností je přímá shodnost.
- Složení přímé a nepřímé shodností je nepřímá shodnost.

3.2.2 Podobná zobrazení

Podobné zobrazení je složení libovolné shodnosti a stejnoolehlosti. Pripustíme-li tedy, že kromě již zmíněných shodných zobrazení můžeme objekt libovolně zvětšovat či zmenšovat, mluvíme o podobném zobrazení.

Definice 3.2.11 (Podobnost - syntetická definice). Zobrazení $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ nazýváme shodnost, pokud vzdálenost libovolných dvou bodů $X, Y \in \mathbb{R}^n$ je nějakým násobkem vzdálenosti jejich obrazů $L(X)$ a $L(Y)$. Tedy

$$\exists k > 0 \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^n : |XY| = k \cdot |L(X)L(Y)|$$



Obrázek 3.4: Podobné mnohoúhelníky

Definice 3.2.12 (Podobnost - analytická definice). Řekneme, že afinní zobrazení

$$L(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{b}$$

je podobnost, pokud existuje číslo $k \neq 0$ tak, že matice A splňuje

$$A^T A = A A^T = k^2 I, \quad (3.4)$$

kde I značí jednotkovou matici a A^T matici transponovanou.

Definice 3.2.13 (Stejnolehlost - syntetická definice). Stejnolehlost se středem v bodě $S \in \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ nebo $n = 3$) a koeficientem $k \neq 0$ je zobrazení, které bodu $X \in \mathbb{R}^n$ přiřadí bod $X' \in \mathbb{R}^n$ tak, že pokud $k > 0$, pak X' leží na polopřímce SX a pokud $k < 0$, pak X' leží na polopřímce opačné k polopřímce SX platí

$$|X'S| = |k| \cdot |XS|$$

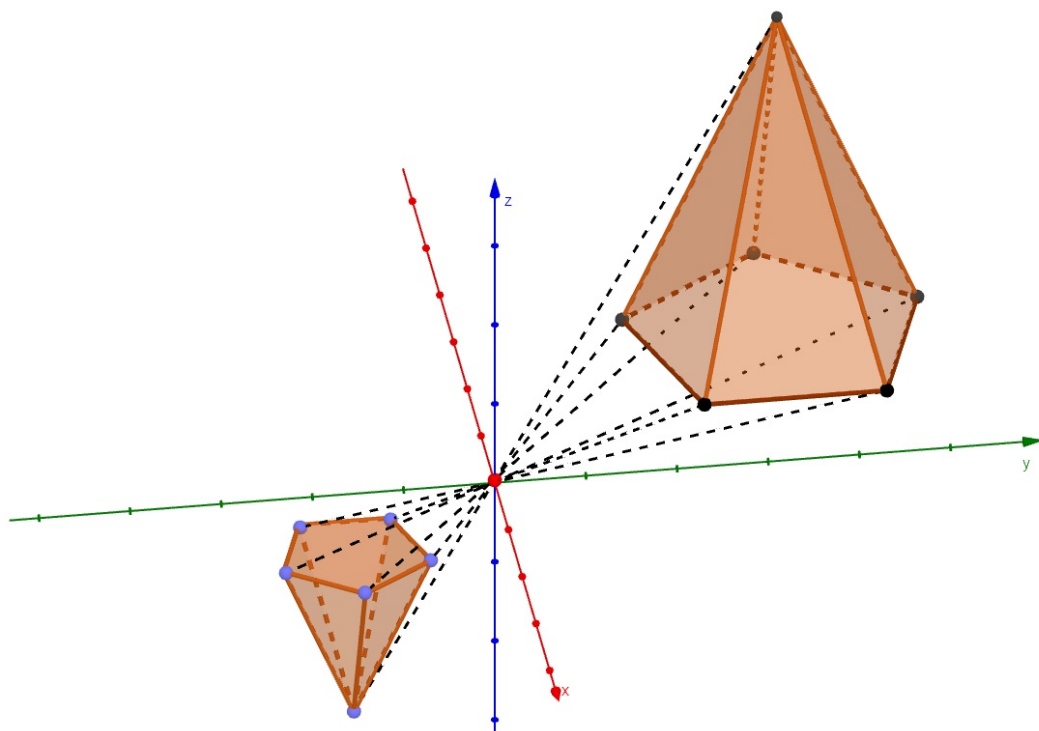
Definice 3.2.14 (Stejnolehlost - analytická definice). Zobrazení $L(\vec{x}) = A\vec{x}$ je stejnoolehlost, je-li matice A násobkem jednotkové matice, tj. existuje-li číslo $k \neq 0$ tak, že

$$A = kI$$

V tomto případě je středem stejnoolehlosti počátek souřadnicového systému.

Příklad 3.2.15. Stejnolehlost se středem v bodě $[0,0,0]$ a koeficientem -2 je podobné zobrazení a má předpis

$$L(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \vec{x}$$



Obrázek 3.5: Podobné jehlany

Poznámka. Všechny kružnice jsou si podobné. Tedy pro libovolné dvě kružnice v rovině existuje podobné zobrazení tvaru

$$L(\vec{x}) = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

které zobrazí jednu kružnici na druhou. Jde tedy o složení stejnoolehlosti a posunutí (nejprve se kružnice "natáhne" a její poloměr se zmenší či zvětší a pak se posune). Stejně tak všechny paraboly jsou si podobné. Obdobně například všechny koule či všechny krychle jsou si podobné.

Definice 3.2.16. Podobné zobrazení $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tvaru $L(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{b}$ je

- **přímá podobnost**, pokud $\det A > 0$
- **nepřímá shodnost**, pokud $\det A < 0$

3.2.3 Geometrický význam determinantu

Úmluva. Označme symbolem $\lambda(M)$ míru množiny M . V případě, že $M \subset \mathbb{R}^2$, jde o její obsah a v případě, že $M \subset \mathbb{R}^3$, jde o její objem.

Tvrzení 3.2.17. Nechť $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) je afinní zobrazení tvaru

$$L(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{b}$$

a $M \subset \mathbb{R}^n$, pak

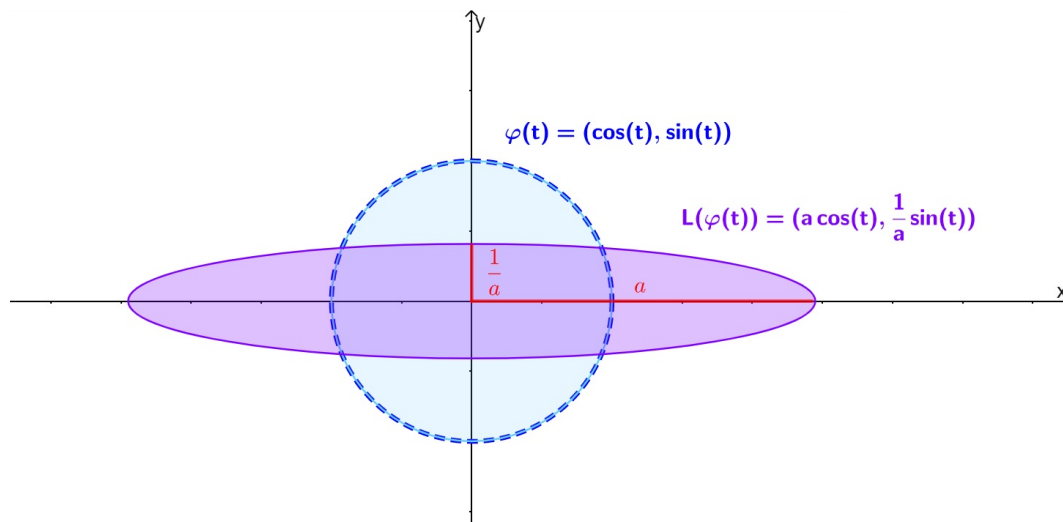
$$\lambda(L(M)) = |\det A| \cdot \lambda(M)$$

Zjednodušeně řečeno, determinant tedy udává **kolikrát se zvětší nebo zmenší obsah či objem nějaké množiny při afinním zobrazení**.

Poznámka. Je-li $|\det A| = 1$, pak afinní zobrazení určené maticí A je zobrazení, které zachovává obsah (resp. objem). Již víme, že shodná zobrazení zachovávají obsah, ovšem zobrazení zachovávající obsah nemusí být shodnost. Např. zobrazení

$$L(\vec{x}) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \vec{x}$$

pro libovolné $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$ zachovává obsah obrazu a vzoru, ale nejde o shodné zobrazení. Jednotkovou kružnici $\varphi(t) = (\cos(t), \sin(t))$ zobrazí na elipsu $L(\varphi(t)) = (a \cos(t), \frac{1}{a} \sin(t))$ o stejném obsahu, ale obraz a vzor nejsou shodné.



Příklad 3.2.18. Obrazem jednotkové kružnice $\varphi(t) = (\cos(t), \sin(t)), t \in [0, 2\pi]$ při lineárním zobrazení

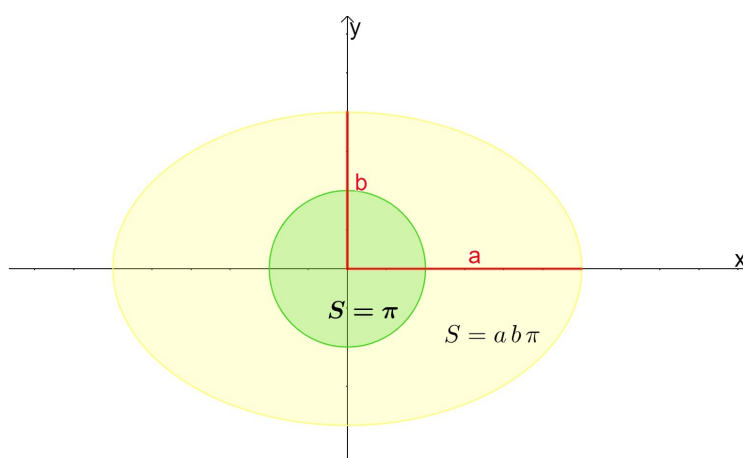
$$L(\vec{x}) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \vec{x}$$

je elipsa s délkami poloos a a b , tj.

$$L(\varphi(t)) = (a \cos(t), b \sin(t)).$$

Obsah této elipsy je tedy součinem obsahu jednotkového kruhu a determinantu této matice. Tedy obsah elipsy s délkami poloos a a b je

$$S = a b \pi$$

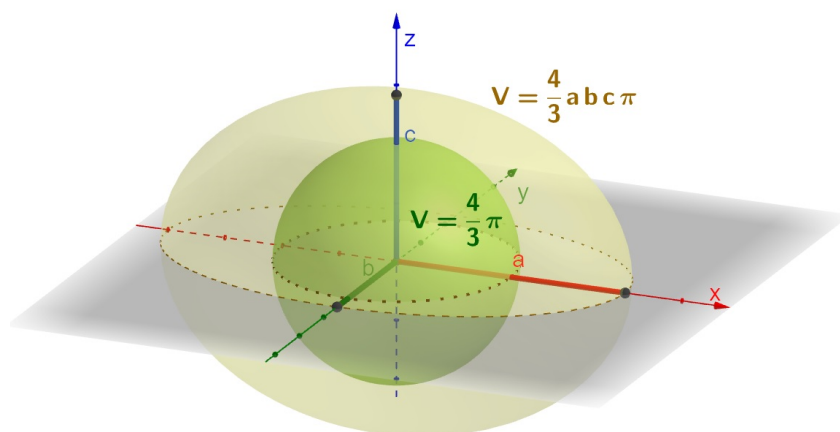


Obdobně, obrazem jednotkové koule při lineárním zobrazení

$$L(\vec{x}) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \vec{x}$$

je elipsoid s délkami poloos a , b a c . Objem takového elipsoidu je tedy součin determinantu této matice a objemu jednotkové koule, tedy

$$V = a b c \frac{4}{3} \pi$$



Příklad 3.2.19. Najděme předpis afinního zobrazení $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, které zobrazí graf funkce $y = \sin x$ na graf funkce

$$y = 3 \cos \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) + 4.$$

Graf této funkce vznikne z funkce $\sin x$ postupnými transformacemi:

$$\sin x \mapsto \cos x \mapsto \cos 2x \mapsto \cos \left(2 \left(x + \frac{\pi}{12} \right) \right) \mapsto 3 \cos \left(2 \left(x + \frac{\pi}{12} \right) \right) + 4$$

Jde tedy o složení těchto zobrazení v následujícím pořadí:

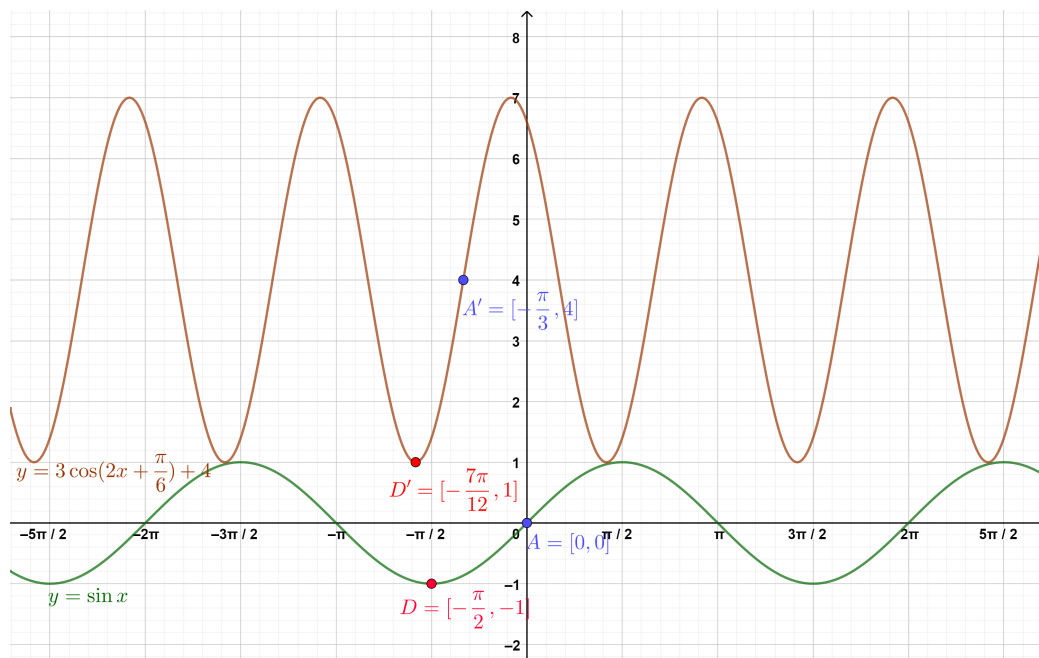
- posunutí o $\frac{\pi}{2}$ doleva, tedy zobrazení $L_1(x, y) = (x - \frac{\pi}{2}, y)^T$
- "smrštění" grafu funkce dvakrát v ose x , tedy zobrazení $L_2(x, y) = (\frac{1}{2}x, y)^T$
- posunutí o $\frac{\pi}{12}$ doleva, tedy zobrazení $L_3(x, y) = (x - \frac{\pi}{12}, y)^T$
- protažení 3-krát v ose y a poté posunutí grafu funkce o 4 nahoru, tedy zobrazení $L_4(x, y) = (x, 3y + 4)^T$

Předpis tohoto zobrazení tedy můžeme zapsat skalárními rovnicemi

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{2} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) - \frac{\pi}{12} \\ y' &= 3y + 4 \end{aligned}$$

neboli

$$L(x, y) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3}, 3y + 4 \right)^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{3} \\ 4 \end{pmatrix}$$



¹Můžeme si zkusit do předpisu tohoto zobrazení dosadit libovolný bod ležící na grafu funkce $y = \sin x$ a ověřit si, že jeho obrazem musí být nějaký bod ležící na grafu funkce $y = 3 \cos \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) + 4$. Například obrazem bodu $A = [0, 0]$ by měl být bod $A' = [-\frac{\pi}{3}, 4]$. Ověřme, že skutečně leží na grafu této funkce:

$$y = 3 \cos \left(2 \cdot \left(-\frac{\pi}{3} \right) + \frac{\pi}{6} \right) + 4 = 3 \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + 4 = 3 \cdot 0 + 4 = 4$$

Tvrzení 3.2.20. *Všechny paraboly jsou si navzájem podobné.*

Důkaz. Ukažme, že existuje podobné zobrazení, které libovolnou parabolu zobrazí na parabolu

$$y = x^2.$$

Taková podobnost bude vždy složením nanejvýš tří zobrazení: **otočení, posunutí a stejnoolehlosti**.

- Nejdříve danou parabolu otočíme kolem jejího vrcholu tak, aby byla grafem kvadratické funkce

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Toto otočení je shodné zobrazení.

- Poté tuto parabolu posuneme tak, aby měla vrchol v počátku souřadnicového systému. Rovnici paraboly umíme upravit na vrcholový tvar

$$y = a(x - B)^2 + C,$$

tedy jde o zobrazení

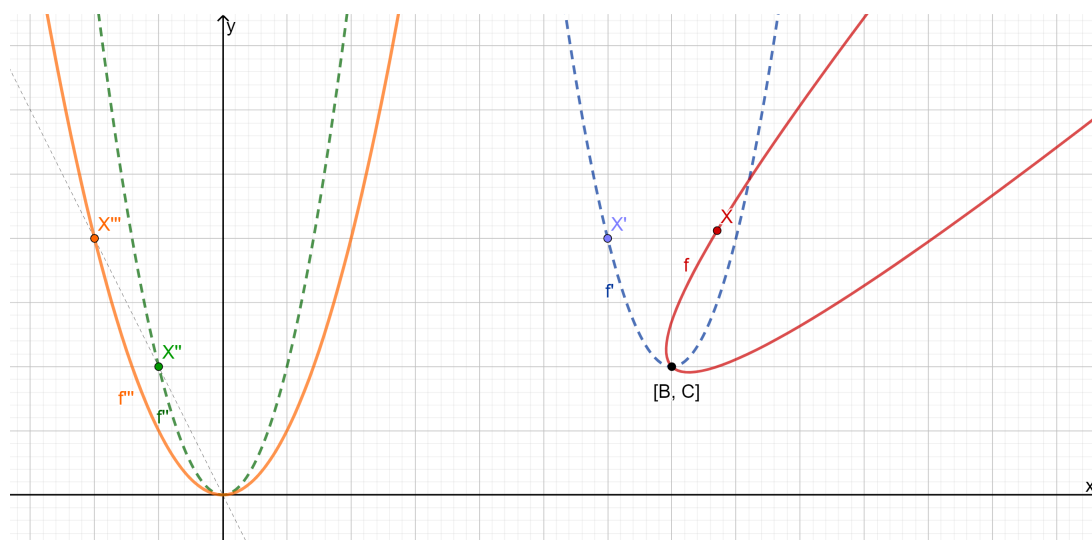
$$L(x, y) = (x - B, y - C)^T$$

- Zbývá tedy ukázat, že paraboly $y = x^2$ a $y = ax^2$ jsou podobné. Uvažujme lineární zobrazení, které libovolný bod $[x, y]$ zobrazí na bod $[x', y'] = [kx, ky]$, kde k je nějaké nenulové číslo. Jde tedy o stejnoolehlost se středem $[0, 0]$ a koeficientem k . Pokud bod $[x, y]$ leží na parabole $y = x^2$, pak pro jeho obraz platí

$$y' = ky = kx^2 = \frac{1}{k}(kx)^2 = \frac{1}{k}(x')^2.$$

Tedy parabola $y = x^2$ je podobná parabole $y' = \frac{1}{k}(x')^2$. Tím pádem podobnost, která parabolu $y = ax^2$ zobrazí na parabolu $y = x^2$ tedy je

$$L(x, y) = (ax, ay)^T$$



□

3.2.4 Příklady k procvičení

Příklad 3.2.21. Napište předpis afinního zobrazení $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, které zobrazí parabolu $y = x^2$ na parabolu

- $y = x^2 + 4x + 7$
- $y = -x^2 + 6x$
- $y = 4x^2 + 8x + 3$

Rozhodněte, zda se v jednotlivých případech jedná o podobnost nebo shodnost (přímou či nepřímou). *Nápověda: Rovnici paraboly upravit na vrcholový tvar.*

Příklad 3.2.22. Napište předpis lineárního zobrazení $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, které zobrazí trojúhelník ABC s vrcholy

$$A = [0, 0], B = [3, 0], C = [0, 2]$$

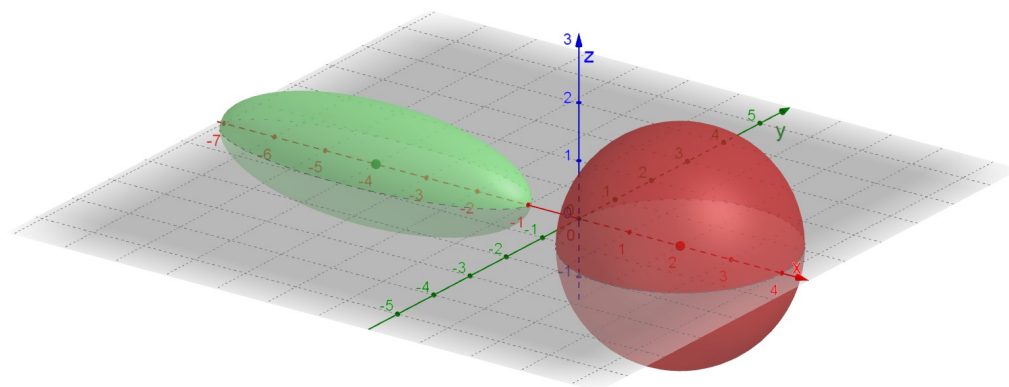
na trojúhelník $A'B'C'$ s vrcholy

- $A' = [0, 0], B' = [0, -3], C' = [2, 0]$
- $A' = [0, 0], B' = [2, 0], C' = [0, -3]$

Rozhodněte, zda se v jednotlivých případech jedná o podobnost nebo shodnost (popř. přímou či nepřímou).

Příklad 3.2.23. Pro která $a, b \in \mathbb{R}$ je zobrazení $L(\vec{x}) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \vec{x}$ shodnost?

Příklad 3.2.24. Určete předpis afinního zobrazení $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, které zobrazí kulovou plochu se středem v bodě $[2, 0, 0]$ a poloměrem 2 na elipsoid se středem v bodě $[-4, 0, 0]$ a délkami poloos 3, 1, 1 (3 ve směru osy x , 1 ve směru osy y , a 1 ve směru osy z) a určete předpis zobrazení $L^{-1} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, které tento elipsoid zobrazí zpět na tuto kulovou plochu.



Příklad 3.2.25. Napište předpis lineárního zobrazení $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, které zobrazí krychli $ABCDEFGH$ s vrcholy

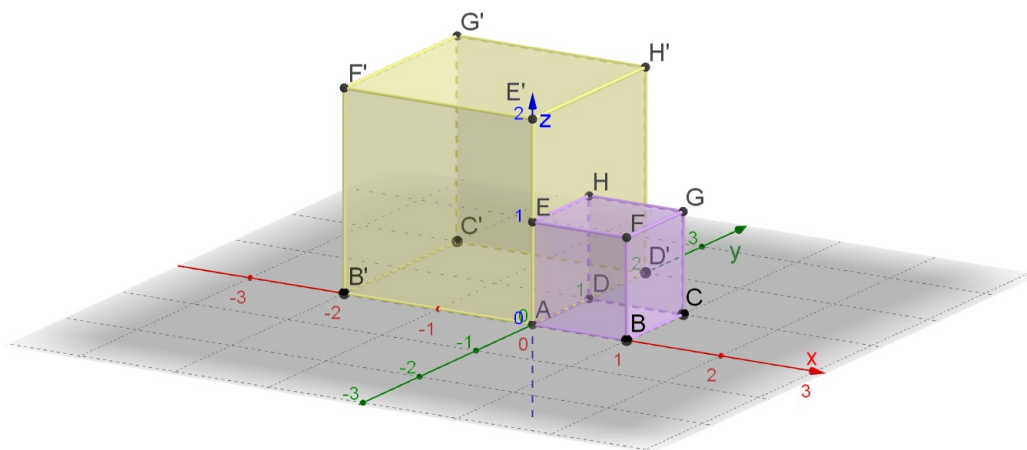
$$A = [0, 0, 0], B = [1, 0, 0], C = [1, 1, 0], D = [0, 1, 0]$$

$$E = [0, 0, 1], F = [1, 0, 1], G = [1, 1, 1], H = [0, 1, 1]$$

na krychli $A'B'C'D'E'F'G'H'$ s vrcholy

$$A' = [0, 0, 0], B' = [-2, 0, 0], C' = [-2, 2, 0], D' = [0, 2, 0]$$

$$E' = [0, 0, 2], F' = [-2, 0, 2], G' = [-2, 2, 2], H' = [0, 2, 2]$$



Jaký je determinant matice tohoto zobrazení? Jaká je jeho geometrická interpretace?

Příklad 3.2.26. Napište předpis afinního zobrazení $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, které zobrazí hyperbolu $y = \frac{1}{x}$ na hyperbolu

$$y = 2 - \frac{1}{x-1}$$

Příklad 3.2.27. Napište předpis afinního zobrazení $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, které zobrazí graf funkce $y = 2^x$ na graf funkce

$$y = \log_{\frac{1}{2}} x$$

Příklad 3.2.28. Napište předpis afinního zobrazení $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, které zobrazí kružnici $x^2 + y^2 - 6y = 0$ na elipsu $x^2 + 4y^2 - 10x + 8y + 25 = 0$.

Příklad 3.2.29. Najděte předpis osové souměrnosti $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ podle osy

- $y = x$
- $y = 2x$
- $y = 2x + 1$

Výsledky

3.2.21.

- $L(x, y) = (x - 2, y + 3)^T$, přímá shodnost
- $L(x, y) = (x + 3, -y + 9)^T$, nepřímá shodnost
- $L(x, y) = (x - 1, 4y - 1)^T$, není ani shodnost ani podobnost; nebo přímá podobnost $L(x, y) = (\frac{1}{4}x - 1, \frac{1}{4}y - 1)^T$

3.2.22.

- $L(x, y) = (y, -x)^T$, přímá shodnost (otočení o 90 stupňů ve směru hodinových ručiček)
- $L(x, y) = (\frac{2}{3}x, -\frac{3}{2}y)^T$, není ani shodnost ani podobnost

3.2.23. 4 možnosti: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

3.2.24.

$$L(x, y, z) = \left(\frac{3}{2}(x - 2) - 4, \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}z \right)^T$$

$$L^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{2}{3}(x + 4) + 2, 2y, 2z \right)^T$$

3.2.25.

$$L(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \vec{x}$$

Determinant této matice je -8 , tedy objem žluté krychle je 8-krát větší než objem růžové krychle.

3.2.26. 4 možnosti:

- $L(x, y) = (x + 1, -y + 2)^T$, složení osové souměrnosti podle osy x a posunutí
- $L(x, y) = (-x + 1, y + 2)^T$, složení osové souměrnosti podle osy y a posunutí
- $L(x, y) = (-y + 1, x + 2)^T$, složení otočení o 90° proti směru hodinových ručiček a posunutí
- $L(x, y) = (y + 1, -x + 2)^T$, složení otočení o 90° ve směru hodinových ručiček a posunutí

3.2.27. $L(x, y) = (y, -x)^T$ - otočení o 90° ve směru hodinových ručiček.

3.2.28. $L(x, y) = (\frac{2}{3}x + 5, \frac{1}{3}(y - 3) - 1)^T$

3.2.29.

- $L(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}$
- $L(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \vec{x}$
- $L(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

3.3 Vlastní čísla a vlastní vektory

Má-li nějaká matice diagonální tvar, můžeme si udělat dobrou představu o tom, co lineární zobrazení určené takovou maticí vlastně "dělá", jak funguje. Například lineární zobrazení určené maticí

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

tříkrát "protahuje" objekt ve směru osy x a dvakrát ve směru osy y . Kružnici zobrazí na elipsu, čtverec zobrazení na obdélník. Je nám ihned jasné, jak bude vypadat obraz nějakého rovinného útvaru. Jak ale "funguje" lineární zobrazení určené nějakou nediagonální maticí, např.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} ?$$

Lze nějak zjistit, co takové lineární zobrazení "dělá"? Pokud by se nám podařilo najít bázi, vůči které má taková matice diagonální tvar, pak možná ano.

Definice 3.3.1. Řekneme, že $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastním číslem matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pokud existuje nenulový vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ takový, že

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \quad (3.5)$$

Jinými slovy, vlastní vektor je takový nenulový vektor $\vec{x}$, který matice zobrazí na vektor stejného směru, respektive na jeho λ -násobek, tedy vektor $\lambda\vec{x}$. Říkáme, že $\vec{x}$ je vlastní vektor matice A příslušný vlastnímu číslu λ .

Rovnost (3.5) lze přepsat jako

$$A\vec{x} - \lambda\vec{x} = \vec{0}$$

a vytknutím vektoru $\vec{x}$ zprava dostaneme

$$(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$$

To je homogenní soustava lineárních rovnic. Protože předpokládáme, že $\vec{x}$ je nenulový vektor, tato soustava má tedy nějaké netriviální řešení a proto matice $A - \lambda I$ musí být singulární. Tím pádem

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Toto budeme používat při výpočtu vlastních čísel.

Tvrzení 3.3.2. $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastním číslem matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ právě tehdy, když

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

¹Regularitu matice lze charakterizovat i následujícím způsobem: Matice B je regulární, pokud homogenní soustava

$$B\vec{x} = \vec{0}$$

má pouze triviální řešení (tj. pouze nulový vektor). V opačném případě je singulární.

Příklad 3.3.3. Určete vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Chceme tedy zjistit, pro jaké λ je $\det(A - \lambda I) = 0$, tedy

$$\begin{aligned} \det \left(\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) &= \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 1 \\ 1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (4 - \lambda)^2 - 1 = \\ &= (4 - \lambda - 1)(4 - \lambda + 1) = (3 - \lambda)(5 - \lambda) \end{aligned}$$

Kořeny tohoto polynomu jsou $\lambda_1 = 3$ a $\lambda_2 = 5$ a to jsou tedy vlastní čísla této matice. Vlastní vektor $\vec{x}$ příslušný vlastnímu číslu $\lambda_1 = 3$ najdeme jako řešení homogenní soustavy

$$(A - 3I)\vec{x} = \vec{0},$$

tedy

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Nemělo by nás překvapit, že matice soustavy je singulární - to plyne přímo z definice vlastního čísla. Tato soustava má tedy nekonečně mnoho řešení. Nám stačí najít alespoň jedno nenulové řešení. Vlastní vektor matice A příslušný vlastnímu číslu $\lambda_1 = 3$ může tedy být například vektor

$$\vec{x} = (1, -1)^T.$$

Vlastní vektor $\vec{x}$ příslušný vlastnímu číslu $\lambda_2 = 5$ najdeme jako řešení homogenní soustavy

$$(A - 5I)\vec{x} = \vec{0},$$

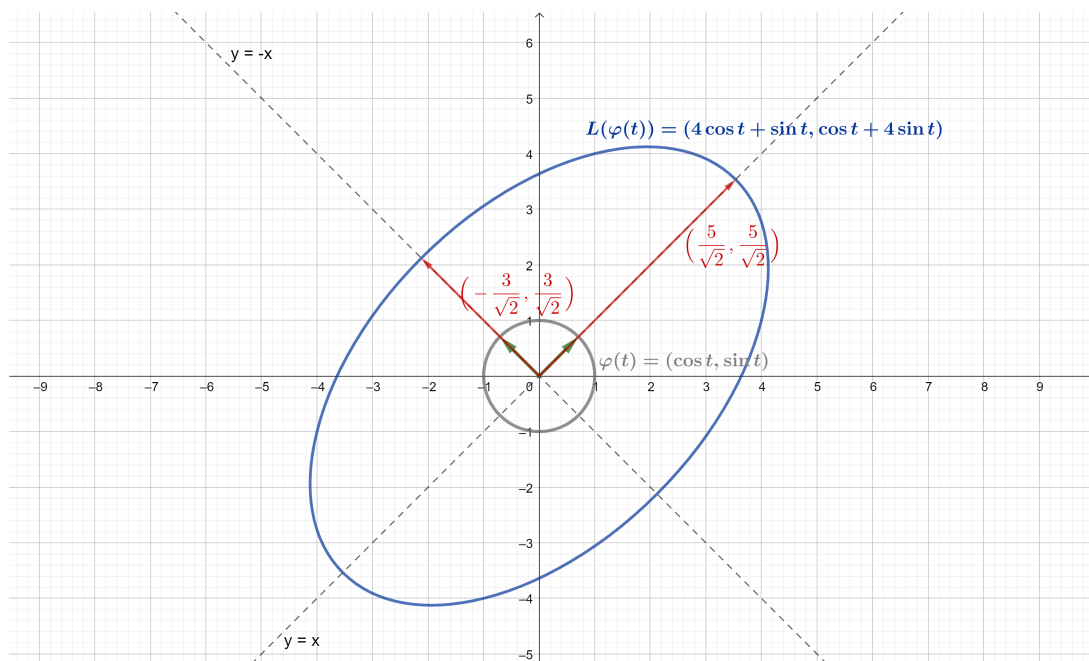
tedy

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Řešením této soustavy může být například vektor

$$\vec{x} = (1, 1)^T.$$

Co jsme tedy nyní zjistili? Zjistili jsme, že matice A 3-krát protahuje objekt ve směru vektoru $(1, -1)^T$ a 5-krát ve směru vektoru $(1, 1)^T$. Tedy vzhledem k "novému" souřadnicovému systému, který je tvořen přímkami $y = x$ a $y = -x$ má tato matice diagonální tvar. Obrazem jednotkové kružnice se středem v $[0,0]$ při lineárním zobrazení určeném touto maticí je tedy "šikmá" elipsa se středem v bodě $[0,0]$, jejíž hlavní poloosa leží ve směru vektoru $(1, 1)^T$ a vedlejší poloosa ve směru $(1, -1)^T$. Obrazem bodu kružnice $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^T$ je bod elipsy $(\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}})^T$ a obrazem bodu kružnice $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^T$ je bod elipsy $(-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}})^T$.



Tato elipsa je tedy obrazem jednotkové kružnice $\varphi(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$ při lineárním zobrazení L_A určeném maticí A , tedy

$$L_A(\cos t, \sin t) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = (4 \cos t + \sin t, \cos t + 4 \sin t)^T$$

Vidíme, že jde o parametricky zadanou křivku, kdy ze zápisu na první pohled není zřejmé, jak taková bude vypadat a jak bychom vyeliminovali parametr.

Definice 3.3.4. Řekneme, že matice A a B jsou **podobné**, pokud existuje regulární matice C taková, že

$$A = C^{-1} \cdot B \cdot C$$

Tvrzení 3.3.5. *Podobné matice mají stejný determinant.*

Důkaz. Využitím věty o determinantu součinu dostaneme

$$\det A = \det (C^{-1} \cdot B \cdot C) = \det C^{-1} \cdot \det B \cdot \det C = \det B,$$

přičemž v posledním kroku jsme vztahu $\det C^{-1} = \frac{1}{\det C}$.

□

Má-li nějaká matice po dvou různá vlastní čísla algebraické násobnosti 1, tak je podobná diagonální matici s vlastními čísly na hlavní diagonále. Sloupce dané regulární matice C jsou pak vlastní vektory dané matice A . Ty tvoří bázi, vůči níž má matice A diagonální tvar.

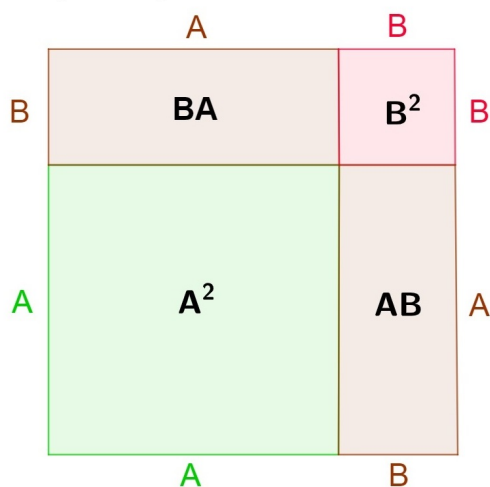
4. Dodatky

4.1 Odvození některých základních vzorců

4.1.1 Algebraické vzorce

- Čtverec o straně $A + B$ můžeme poskládat ze čtverce o straně A , čtverce o straně B a dvou shodných obdélníků o stranách A a B . Tedy pro obsah takového čtverce platí:

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

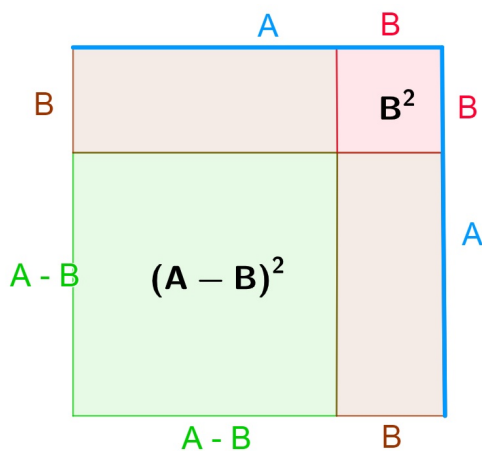


- Čtverec o straně A můžeme rozdělit na čtverec o straně $A - B$, čtverec o straně B a dva shodné obdélníky o stranách B a $A - B$. Tedy pro obsah takového čtverce platí:

$$A^2 = (A - B)^2 + 2B(A - B) + B^2$$

neboli

$$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

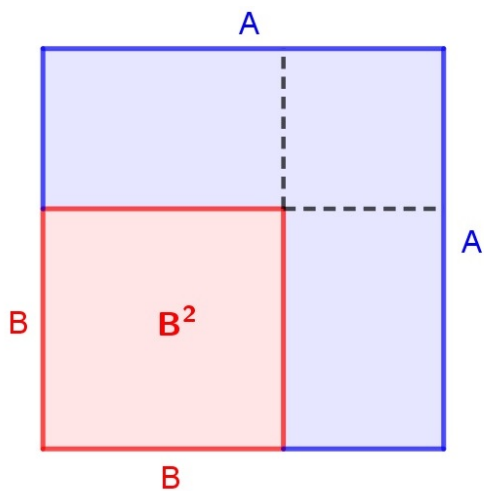


$$(A - B)^2 = A^2 - AB + B^2 - AB$$

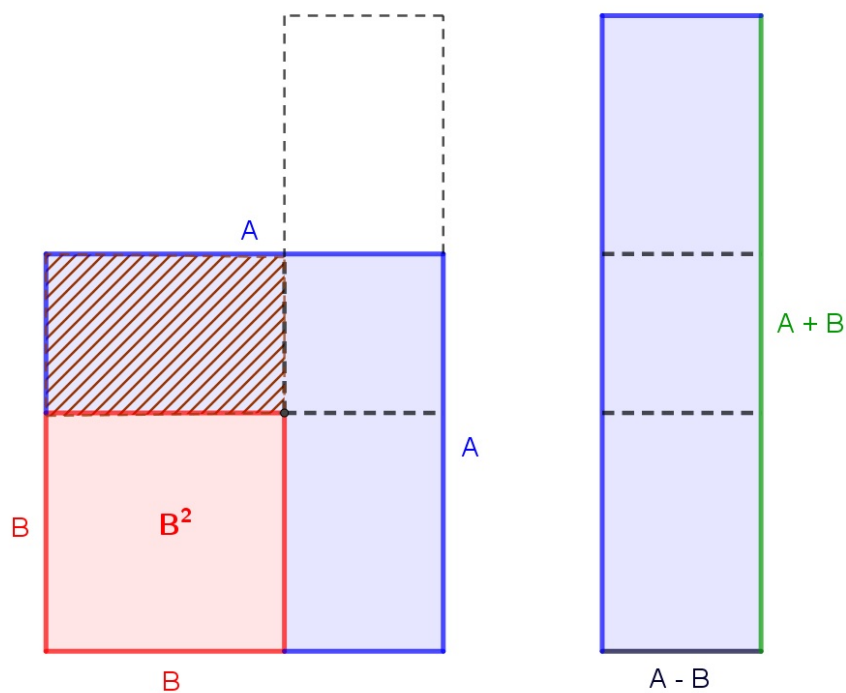
$$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

- Vystříhneme-li z většího čtverce o straně A menší čtverec o straně B (červený), získáme rovinný útvar (modrý), jehož obsah je

$$A^2 - B^2$$



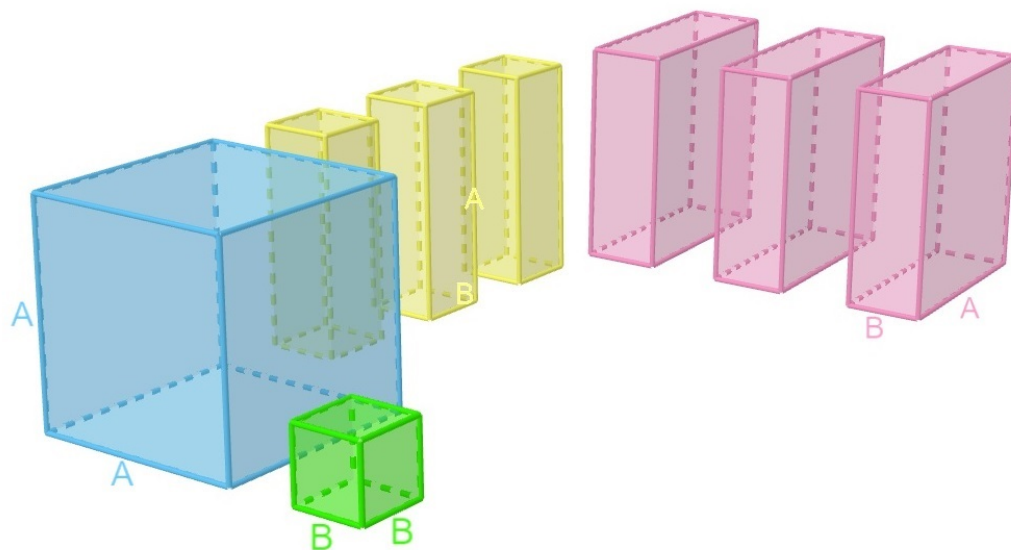
Vystřížením a přemístěním vyšrafovaného obdélníku poskládáme tento rovinný útvar na obdélník o stranách $A - B$ a $A + B$.



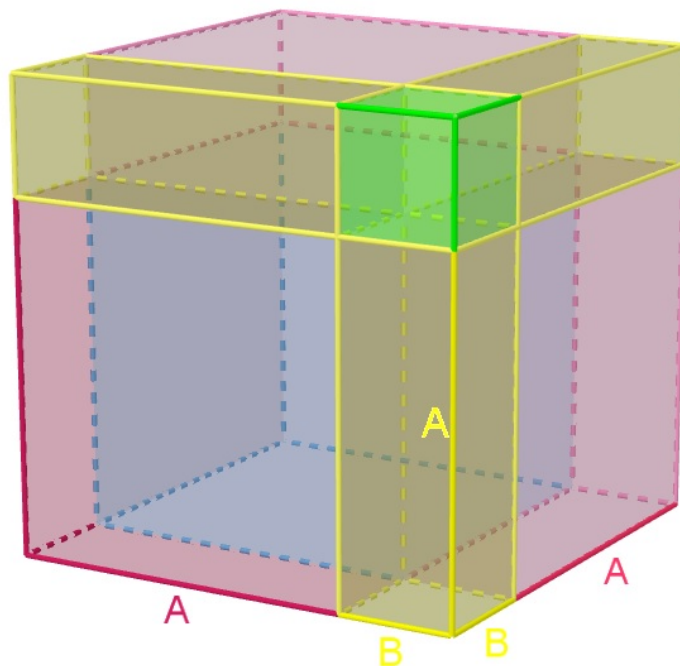
Tedy

$$A^2 - B^2 = (A - B) \cdot (A + B)$$

- Krychli o hraně $A+B$ můžeme sestavit z krychle o hraně A (modře), krychle o hraně B (zeleně), třech shodných kvádrů o hranách A,A,B (růžově) a třech shodných kvádrů o hranách A,B,B (žlutě). Tedy pro objem takové krychle platí:

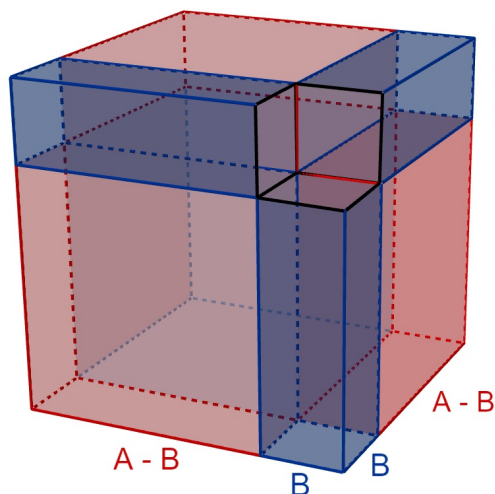


$$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$



- Vyřízneme-li z větší krychle o hraně A menší krychli o hraně B , získáme těleso o objemu

$$A^3 - B^3$$



Takové těleso umíme rozdělit na tři kvádry: kvádr o hranách $A - B, B, B$, kvádr o hranách $A - B, A, B$ a kvádr o hranách $A - B, A, A$. Tedy pro objem takového tělesa platí:

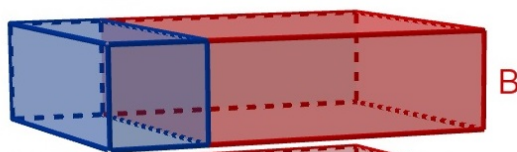
$$A^3 - B^3 = (A - B) \cdot B^2 + (A - B) \cdot A \cdot B + (A - B) \cdot A^2$$

$$A^3 - B^3 = (A - B) \cdot (A^2 + AB + B^2)$$

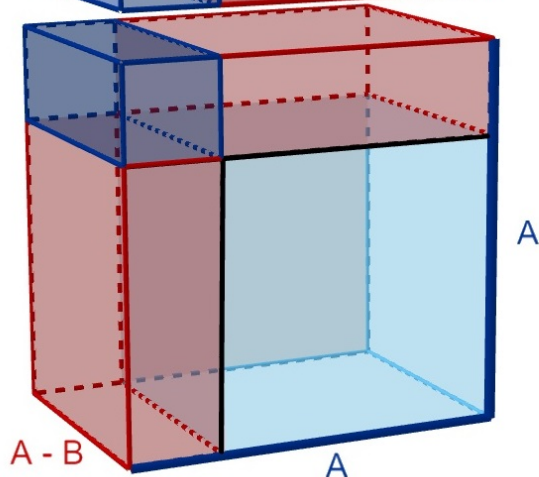
$$(A - B) \cdot B^2$$



$$(A - B) \cdot A \cdot B$$



$$(A - B) \cdot A^2$$



4.1.2 Goniometrické vzorce

Jedním z praktických využití komplexních čísel může být to, že díky jejich znalosti dovedeme odvodit nějaké základní vzorečky z goniometrie. Připomeňme jedno užitečné tvrzení známé jako Moivreova věta, které říká, jak umocnit komplexní číslo v goniometrickém tvaru.

Věta 4.1.1 (Moivreova věta). *Pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ a libovolné $n \in \mathbb{Z}$ platí:*

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$$

Pro $n = 2$ umíme komplexní číslo $\cos x + i \sin x$ umocnit pomocí Moivreovy věty a také ho umíme umocnit pomocí vzorečku $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. Tedy:

$$(\cos x + i \sin x)^2 = \cos 2x + i \sin 2x = \cos^2 x + 2i \cos x \sin x + i^2 \sin^2 x.$$

a protože imaginární jednotka i je definován jako $i^2 = -1$, dostáváme

$$\cos 2x + i \sin 2x = \cos^2 x + 2i \cos x \sin x - \sin^2 x$$

Reálné složky levé strany se musejí rovnat reálným složkám pravé strany a zároveň imaginární složky levé strany se musejí rovnat imaginárním složkám pravé strany

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x. \quad (4.1)$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x. \quad (4.2)$$

Tímto jsme odvodili vzorce pro dvojnásobný argument sinu a kosinu, které často používáme při úpravách goniometrických výrazů. Dost možná se mnozí z nás tyto vzorečky učili na střední škole nazpaměť.

Podobně pro $n = 3$ umíme komplexní číslo $\cos x + i \sin x$ umocnit pomocí Moivreovy věty a také pomocí vzorečku $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$. Tedy:

$$\begin{aligned} (\cos x + i \sin x)^3 &= \cos 3x + i \sin 3x = \\ &= \cos^3 x + 3i \cos^2 x \sin x + 3i^2 \cos x \sin^2 x + i^3 \sin^3 x = \\ &= \cos^3 x + 3i \cos^2 x \sin x - 3 \cos x \sin^2 x - i \sin^3 x \end{aligned}$$

Položíme-li rovnost reálných složek i imaginárních složek, dostáváme:

$$\cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x \quad (4.3)$$

$$\sin 3x = 3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x. \quad (4.4)$$

Tímto jsme odvodili vzorce pro trojnásobný argument sinu a kosinu, které si většina lidí nepamatuje. Kdyby se však člověk dostal do situace, kdy tyto vzorce potřebuje, může si je snadno odvodit.

Podobně bychom uměli odvodit vzorce pro $\sin 4x, \cos 4x, \sin 5x, \cos 5x$, atd., použitím binomické věty pro n -tou mocninu dvojčlenu $(A + B)^n$.

Množina komplexních čísel jednotkové velikosti, tj. čísel ležících na jednotkové kružnici

$$M = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$$

je **uzavřená na násobení** (dokonce tvoří multiplikativní grupu). To znamená, že pro libovolná $z_1, z_2 \in M$ je

$$z_1 \cdot z_2 \in M$$

Následující tvrzení říká, že dvě komplexní čísla na jednotkové kružnici vynásobíme tak, že jejich argumenty sečteme.

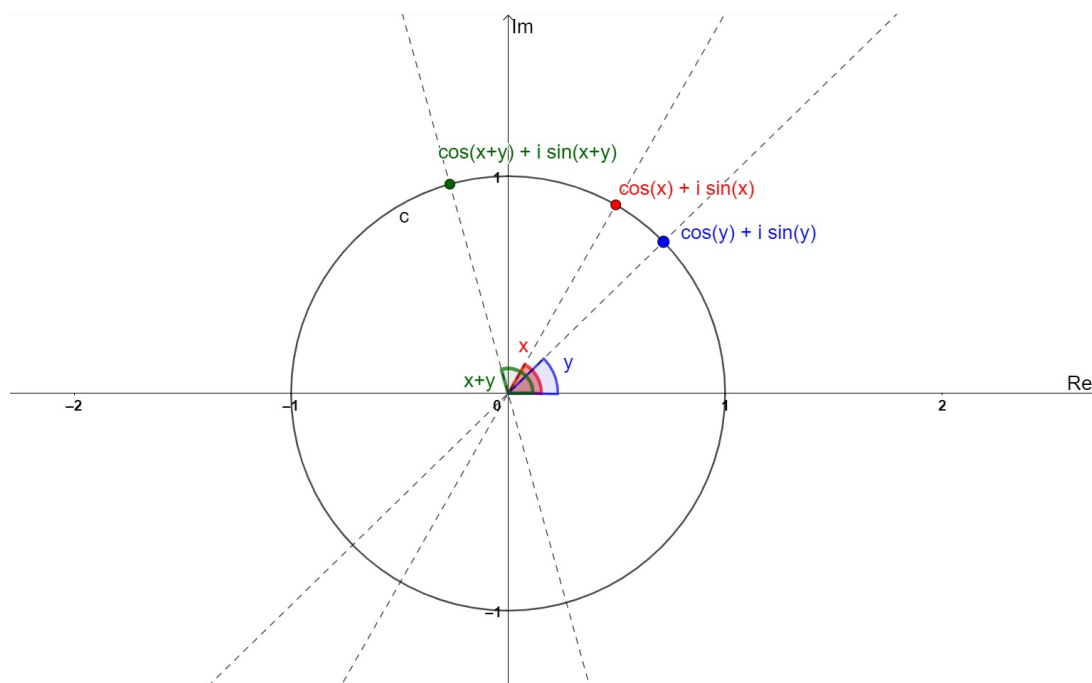
Tvrzení 4.1.2. *Nechť $x, y \in \mathbb{R}$ a*

$$z_1 = \cos x + i \sin x$$

$$z_2 = \cos y + i \sin y$$

Pak

$$z_1 \cdot z_2 = \cos(x + y) + i \sin(x + y)$$



Dvě komplexní čísla na jednotkové kružnici tedy umíme vynásobit pomocí tohoto tvrzení a také je umíme vynásobit "algebraicky" (tj. tak, jak roznásobujeme závorky "klasicky" člen po členu). Tedy

$$\begin{aligned} (\cos x + i \sin x) \cdot (\cos y + i \sin y) &= \cos(x + y) + i \sin(x + y) = \\ &= \cos x \cos y + i \sin x \cos y + i \cos x \sin y + i^2 \sin x \sin y = \\ &= \cos x \cos y - \sin x \sin y + i(\sin x \cos y + \cos x \sin y) \end{aligned}$$

Tímto jsme tedy odvodili součtové vzorce

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad (4.5)$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \quad (4.6)$$