APROXIMAČNÍ ALG. – VRCHOLOVÉ POKRYTÍ

VSTUP: $G=(V,E)$, $c: V \to \mathbb{R}_0^+$

VÝSTUP: $A \subseteq V$ tak, že každá hrana incidentní s A

CÍL: $\min c(A) = \sum_{v \in A} c(v)$

$$\min \sum_{v \in V} c_v x_v$$

$$x_v \geq 0$$

$$\forall uv \in E \quad \underline{x_u} + \underline{x_v} \geq 1$$

ALG: Spočítáme x^* optimum LP

$$\bar{x}_v = \begin{cases} 1 & \text{jestliže } x_v^* \geq 1/2 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$A := \{v \mid \bar{x}_v = 1\}$$

$\bar{x}$ přípustné, tj. A je vrch. pokrytí

$$LP(I) \leq OPT(I) \leq ALG(I) \leq 2 \cdot LP(I)$$

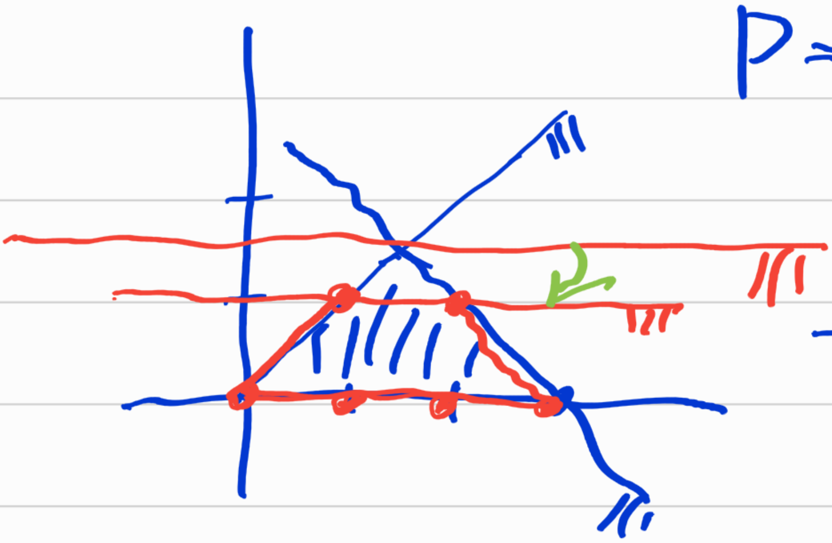
optimum LP

$$\bar{x}_v \leq 2 \cdot x_v^*$$

$\boxed{V}$ ALG je 2-aproximační algoritmus pro vrch. pokrytí

CELOČÍSELNÉ PROGRAMOVÁNÍ

METODA ŘEZŮ



$P = \{x \mid$

$x_1, x_2 \geq 0 \wedge$

$-x_1 + x_2 \leq 0 \wedge \quad \Big| \cdot \frac{1}{2}$

$x_1 + x_2 \leq 3 \} \quad \Big| \cdot \frac{1}{2}$

platná nerovnost pro P $\quad x_2 \leq \frac{3}{2}$

platný řez $\quad x_2 \leq 1 = \lfloor \frac{3}{2} \rfloor$

LP/mnohostěn

$P = \{x \mid x \geq 0 \wedge Ax \leq b\}$ $\quad$ A, b celočíselné

$Z = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid x \geq 0 \wedge Ax \leq b\}$

Def: Nechť nerovnice $\alpha x \leq \beta$ platí pro všechna $x \in P$

Pak nerovnici

$$\lfloor \alpha \rfloor x \leq \lfloor \beta \rfloor$$

$\hookrightarrow \sum \lfloor \alpha_i \rfloor x_i$

nazýváme <u>platný řez</u>

<u>Poznámky:</u>

- Chvátalův-Gomoryho řez
- platný řez splňující všechna $x \in Z$
- každý platný řez získáme konvexní kombinací nerovností + zaokrouhlením

  t.j. pro nějaké

  $$y \geq 0 \quad y \in R^m$$

  $$u \in Z^n \quad u^T \leq \lfloor y^T A \rfloor$$

  je platný řez

  $$u^T x \leq \lfloor y^T b \rfloor$$

POLYTOP PERF. PÁROVÁNÍ

$G=(V,E)$

$x_e \geq 0$

$x(\delta(v)) = 1$

$\delta(A)$ $A \subseteq V$ … hrany jdoucí z A do $V \setminus A$

$\gamma(A)$ … hrany $\subseteq A$

$(\forall S \subseteq V)\ |S|$ lichá

$x(\delta(S)) \geq 1$

$x(\gamma(S)) \leq \frac{|S|-1}{2}$

MNOHOSTĚN PERF. PÁROVÁNÍ

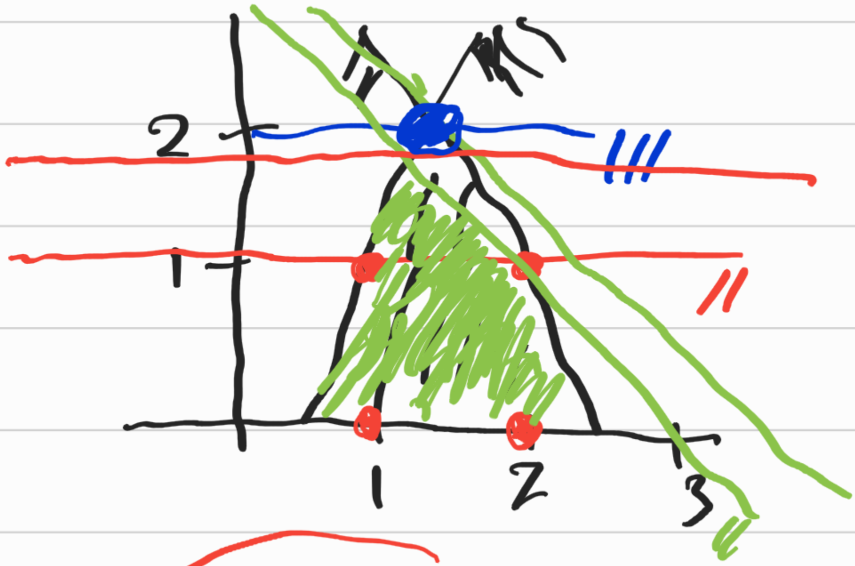
$\underbrace{x(\delta(S))}_{\geq 0} + 2x(\gamma(S)) = |S|$

- červené nerovnosti jsou platné řezy pro mnohostěn zlomkových párování

$2 \cdot x(\gamma(S)) \leq |S|$

$x(\gamma(S)) \leq \frac{|S|}{2}$ platná $\leq$ pro

$x(\gamma(S)) \leq \frac{|S|-1}{2}$ je platný řez pro $|S|$ liché



$x_1, x_2 \geq 0$

$-2x_1 + x_2 \leq -1$

$2x_1 + x_2 \leq 5$

$x_1 + x_2 \leq 3$ je řez

$x_2 \leq 1$ není platný řez

$x_2 \leq 2$ je platná nerovnice

$\boxed{V}$ (o univerzalitě metody řezů)
Nechť $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0 \wedge Ax \leq b\}$, $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Z}^m$
a $Z = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid x \in P\}$.

Nechť $\alpha x \leq \beta$ je platná pro Z, $\alpha \in \mathbb{Z}^n$, $\beta \in \mathbb{Z}$

Pak $\alpha x \leq \beta$ lze odvodit postupným přidáváním platných řezů (přidáním konečně mnoha).

Dk: pro případ, že $P \subseteq [0,1]^n$

(1) $\alpha^T x \leq \beta + t$ je platná pro P pro nějaké $t \in \mathbb{Z}$

(2) Pro libovolné N_0, N_1, $N_0 \dot\cup N_1 = \{1, \dots, n\}$ a dost velké M platí pro $P \to$ vrchol x

$$\alpha^T x \leq \beta + M \left(\sum_{i \in N_0} x_i + \sum_{i \in N_1} (1 - x_i) \right) \quad \Big| \cdot \frac{1}{M}$$

Postupně pro $r = t-1, t-2, \dots, 0$:

$$\alpha^T x \leq \beta + r + 1 \quad \Big| \cdot \frac{M-1}{M}$$

(3) Pro lib. N_0, N_1, $N_0 \dot\cup N_1 = \{1, \dots, n\}$

$$\alpha^T x \leq \beta + r + \left(\sum_{N_0} x_i + \sum_{N_1} (1 - x_i) \right)$$

(4) Pro lib. $p \leq n$, P_0, P_1 $P_0 \dot\cup P_1 = \{1, \dots, p-1\}$

z

$$\alpha^T x \leq \beta + r + \sum_{P_0 \cup \{p\}} \overset{x_p}{x_i} + \sum_{P_1} (1 - x_i) \quad \Big| \cdot \frac{1}{2}$$

$$\alpha^T x \leq \beta + r + \sum_{P_0} x_i + \sum_{P_1 \cup \{p\}} \overset{1 - x_p}{(1 - x_i)} \quad \Big| \cdot \frac{1}{2}$$

odvodím

$$\alpha^T x \leq \beta + r + \sum_{P_0} x_i + \sum_{P_1} (1 - x_i) + \frac{1}{2}$$

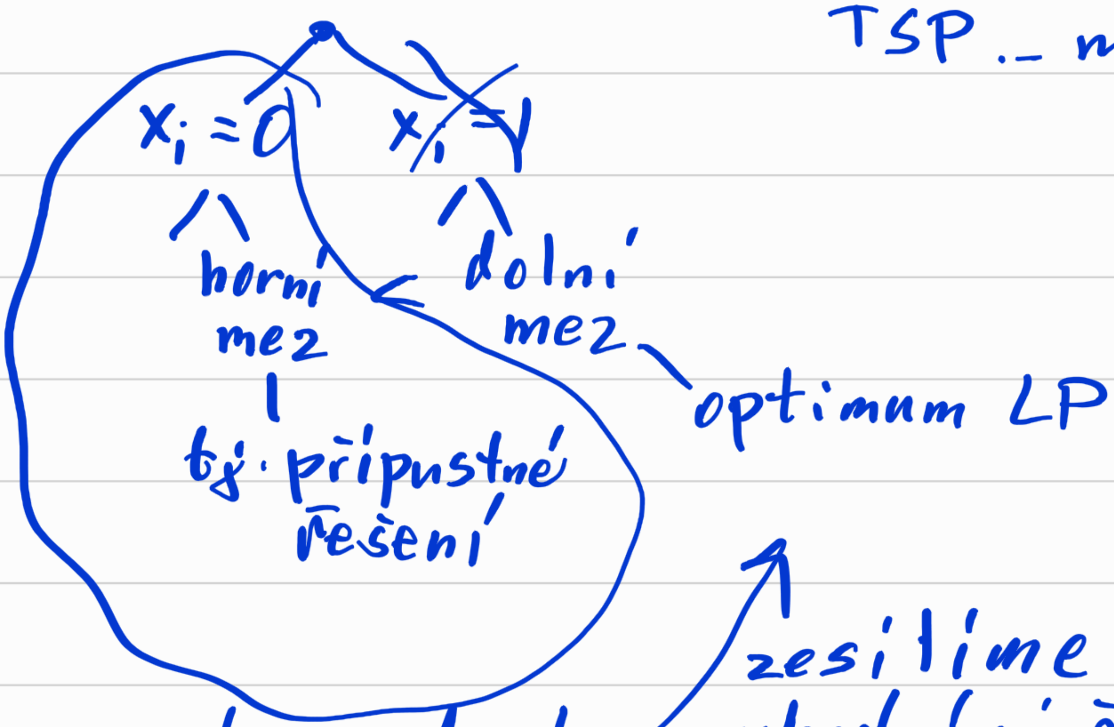
nakonec dostanu

$$\alpha^T x \leq \beta + r$$

CELOČÍSELNÉ PROGRAMOVÁNÍ

- řezy … přidáme „chytré" platné řezy
  - najdeme neceločíselné optimum, potom přidáme vhodný řez
- branch and bound

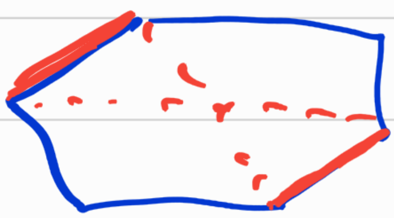
TSP … minimalizace



- branch and cut

zesílíme vhodnými řezy

- aproximační algoritmy
- hladové algoritmy
- lokální prohledávání



- metody UI – genetické alg.
  – simulované žíhání
- prog. s omezujícími podmínkami
  constraint programming