

Def: Necht' S je konečné, $I \subseteq 2^S$ syst. podmnožin.

(S, I) se nazývá matroid, pokud

(1) $\emptyset \in I$

(2) $(\forall J, J') (J' \subseteq J \in I \Rightarrow J' \in I)$

(3) $(\forall A \subseteq S)$ (všechny na inkluzi maximální množiny X splňující $X \subseteq A, X \in I$ mají stejnou velikost) $\rightarrow$ počet prvků

Příklady:

- nezávislé množiny vektorů
v konečném vektorovém prostoru

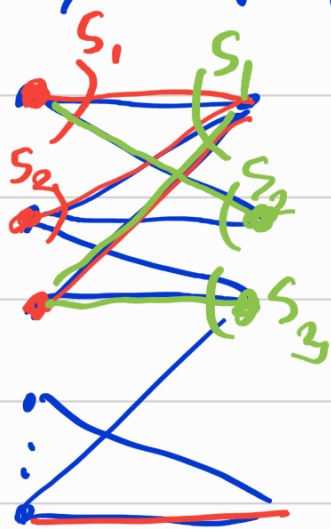
- dan $G = (V, E)$ $S = E$

$F \subseteq E$ je nezávislá $\Leftrightarrow F$ je les

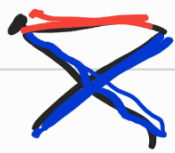
- $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_k$

$X \subseteq S$ je nezávislá $\Leftrightarrow (\forall i) |X \cap S_i| \leq 1$

S = hrany bip. grafu



množina všech
bipartitních
párování
je průnik dvou
matroidů
 (S, I_1) (S, I_2)



průnik: $(S, I_1 \cap I_2)$

$J \in I$... nezávislá množina

$J \in I$ maximální vzhledem k $\subseteq$
... báze

Def: Pro $A \subseteq S$, je rank A , značíme $r(A)$,
velikost maximální $X \subseteq A, X \in I$.

$\square$ $B \subseteq 2^S$ je systém bází nějakého matroidu (S, I)

$\Leftrightarrow$ • $B \neq \emptyset$, a

• $(\forall B_1, B_2 \in B)(\forall a \in B_1 \setminus B_2)(\exists b \in B_2 \setminus B_1)$
 $(B_1 \cup \{a\} \cup \{b\} \in B)$

analogie

věty o výměně
ve vekt. prostorech



Dk: $(S, I) \rightsquigarrow (S, B)$

B ... maximální nezávislé, tj. $X \in I$



$A = B_1 \cup B_2 \setminus \{a\}$

$$r(A) = |B_1| = |B_2|$$

$B_1 \cup \{a\} \in I$

doplním na
max. nezávislou $\subseteq A$

$$(S, \mathcal{B}) \rightsquigarrow (S, \mathcal{I})$$

$$\mathcal{I} = \{A \subseteq S \mid (\exists B \in \mathcal{B}) (A \subseteq B)\}$$



HLADOVÝ ALGORITMUS PRO MATROIDY

NEZÁVISLÁ MNOŽINA MAXIMÁLNÍ CENY

VSTUP: matroid $(S, \mathcal{I})$, $c: S \rightarrow \mathbb{R}$

VÝSTUP: $A \in \mathcal{I}$

CÍL: maximalizovat $\sum_{e \in A} c_e$

HLADOVÝ ALG.

(1) $A = \emptyset$

(2) pokud $(\exists e \in S) (A \cup \{e\} \in \mathcal{I} \wedge c_e > 0)$

↑ tak: najdi takové e s maximální c_e
 $A := A \cup \{e\}$

(3) výstup: A



LP: $\max \sum_{e \in S} c_e x_e$ obecná lin. fce

$$(\forall e \in S) \quad x_e \geq 0$$

$$(\forall A \in S) \quad x(A) = \sum_{e \in A} x_e \leq r(A) \quad | \quad y_A$$

[V] Hladorý algoritmus najde optimum LP.

Dk: Duální LP: $\min \sum_{A \in S} r(A) \cdot y_A$

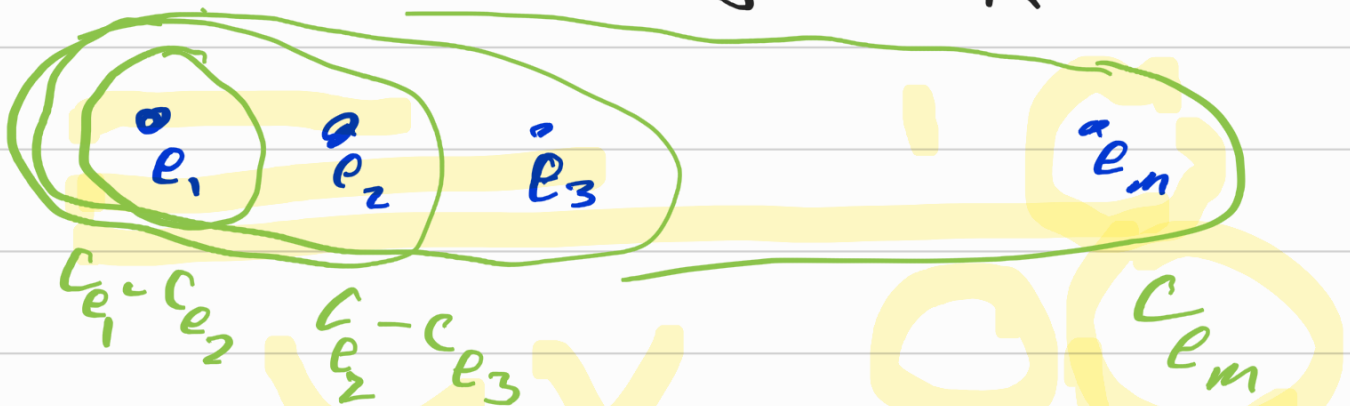
$$y_A \geq 0$$

$$(\forall e \in S) \quad \sum_{\substack{A \in S \\ e \in A}} y_A \geq c_e$$

Necht' $c_{e_1} \geq c_{e_2} \geq \dots \geq c_{e_m} > 0$

jsou všechna e s nezopornou cenou

$$y_A = \begin{cases} c_{e_i} - c_{e_{i+1}} & A = \{e_1, \dots, e_i\} \\ c_{e_m} & A = \{e_1, \dots, e_m\} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$



$x_e \dots$ řešení z hledového alg.

x y splňují podmínky komplementarity

$$x_{e_i} > 0 \Rightarrow \sum_{A \ni e_i} y_A = c_{e_i}$$

$$y_{\bar{A}} > 0 \Rightarrow x(\bar{A}) = r(\bar{A})$$

$$x_{e_1} + \dots + x_{e_i} = r(\{e_1, \dots, e_i\})$$

$\bar{A} \uparrow$

□ Polytop matroidu $(S, \mathcal{I})$, tj.

$$P = \left\{ x \mid \begin{array}{l} x_e \geq 0 \quad \forall e \in S \\ x(A) \leq r(A) \quad \forall A \subseteq S \end{array} \right\}$$

je celočíselný.

□ Necht' $G = (V, E)$ je souvislý graf.

Pak konvexní obal charakteristikých

vektorů koster G je polytop
daný:

$$\sum x_e = |V| - 1 \quad \leftarrow$$

$$x_e \geq 0$$

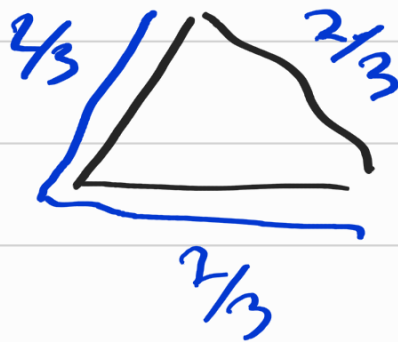
$$(V \setminus T \subseteq V)$$

$$\sum_{\substack{uv \in E \\ u \in T, v \in \bar{T}}} x_{uv} \leq |T| - 1$$

matroid lesů r G

$$x_e \geq 0$$

$$A \subseteq E \quad \sum_{e \in A} x_e \leq r(A)$$



□ Necht' $(S, I_1), (S, I_2)$ jsou matroidy.

Pak konvexní obal char. vektorů množin $J \subseteq I_1 \cap I_2$ je polytop

$$\begin{aligned} & x_e \geq 0 \\ (\forall A \in S) \quad & x(A) \leq r_1(A) \\ & x(A) \leq r_2(A) \end{aligned}$$

Tj. průnik dvou polytopů matroidů je celočíselný.

Existuje algoritmická verze.

Tj. lineární funkce umíme optimalizovat přes $I_1 \cap I_2$ v poly. čase.