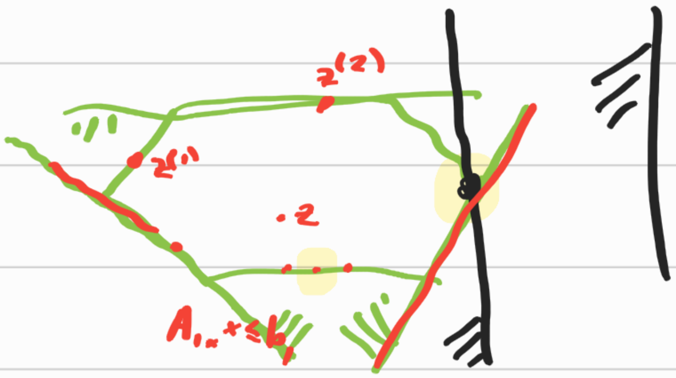
$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A'x = b' \wedge A''x \le b''\} \neq \emptyset$$

m' rovnic $\quad$ m'' nerovnic

Def: Tento popis je minimální popis mnohostěnu, jestliže nemůžeme vynechat žádnou podmínku nebo změnit $\le$ na $=$ bez změny P.



$$\begin{aligned} x_1 \quad + x_3 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + \quad 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

$$L = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A'x = b'\}$$

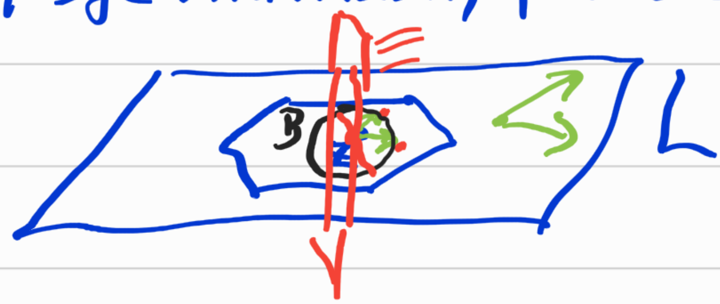
Pozorování: V minimálním popisu $\dim(L) = n - m'$
Obecně $\dim(L) = n - \operatorname{rank}(A')$, je-li $L \neq \emptyset$

L: Nechť $z \in P$ splňuje $A''z < b''$. Pak

- $\dim(P) = n - \operatorname{rank}(A')$
- z neleží v žádné vlastní stěně P.

Je-li $P \neq \emptyset$ a popis je minimální, pak z existuje.

Dk:



$$B = \{ x \in L \mid \|x - z\| < \varepsilon \} \subseteq P$$

pro malé ε

z

$z + e_1, z + e_2, \dots$

$$\forall i \le m'' \ \exists z^{(i)} \in P \quad A''_{i*} z^{(i)} < b''_i$$

$$z = \frac{1}{m''} \sum_{i=1}^{m''} z^{(i)}$$

$\boxed{V}$ V minimálním popisu $P^{\neq \emptyset}$ nerovnice odpovídají vzájemně jednoznačně fasetám P.
Každá vlastní stěna P je stěnou některé fasety.

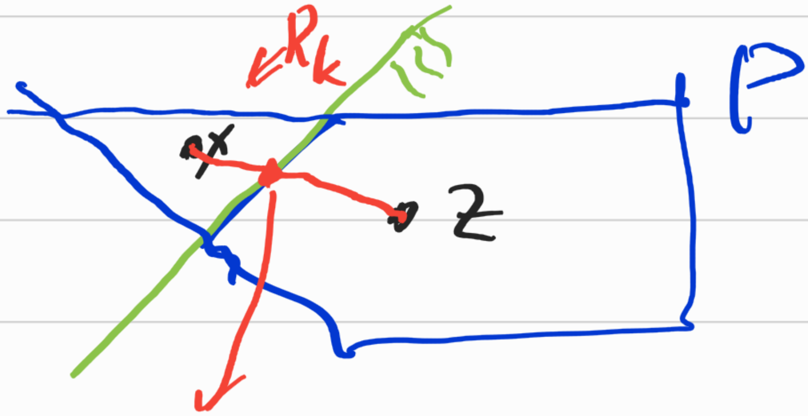
Dk: $R_k = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid A''_{k*} x = b''_k \}$

$F_k = R_k \cap P$

máme popis F_k $m'+1$ rovnicemi a $m''-1$ nerovnic
– ne nutně minimální

máme $z \in P$, $A'' z < b''$ ← podle L.prof

máme $x \in P$, $A''_{k*} x > b''_k$, splňuje ostatní podmínky ← jinak můžeme k-tou nerovnost vynechat



$$y^{(k)} \in P \cap R_k = F_k$$

$\forall i,\ i \neq k \qquad A''_{i*}\, y^{(k)} < b''_i$

$$y^{(k)} \notin F_i$$

Z L pro popis F_k: $\dim(F_k) \geq n-(m'+1)$

$$= \dim(P) - 1$$

$F_k \neq P$, t.j. F_k je vlastní stěna,

$$\dim(F_k) \leq \dim(P) - 1$$

$\Rightarrow$ F_k je faseta, $F_i \neq F_k$ pro $i \neq k$

$E \subsetneq P$ vlastní stěna $\Rightarrow \exists k \quad E \subseteq F_k$

pokud $\forall k\ E \not\subseteq F_k$

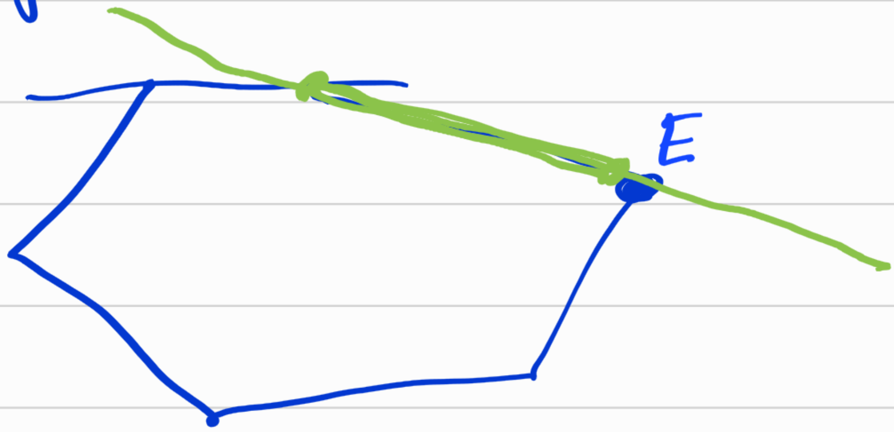
$\exists\, z^{(k)} \in E$ splňující $A''_{k*}\, z^{(k)} < b''_k$

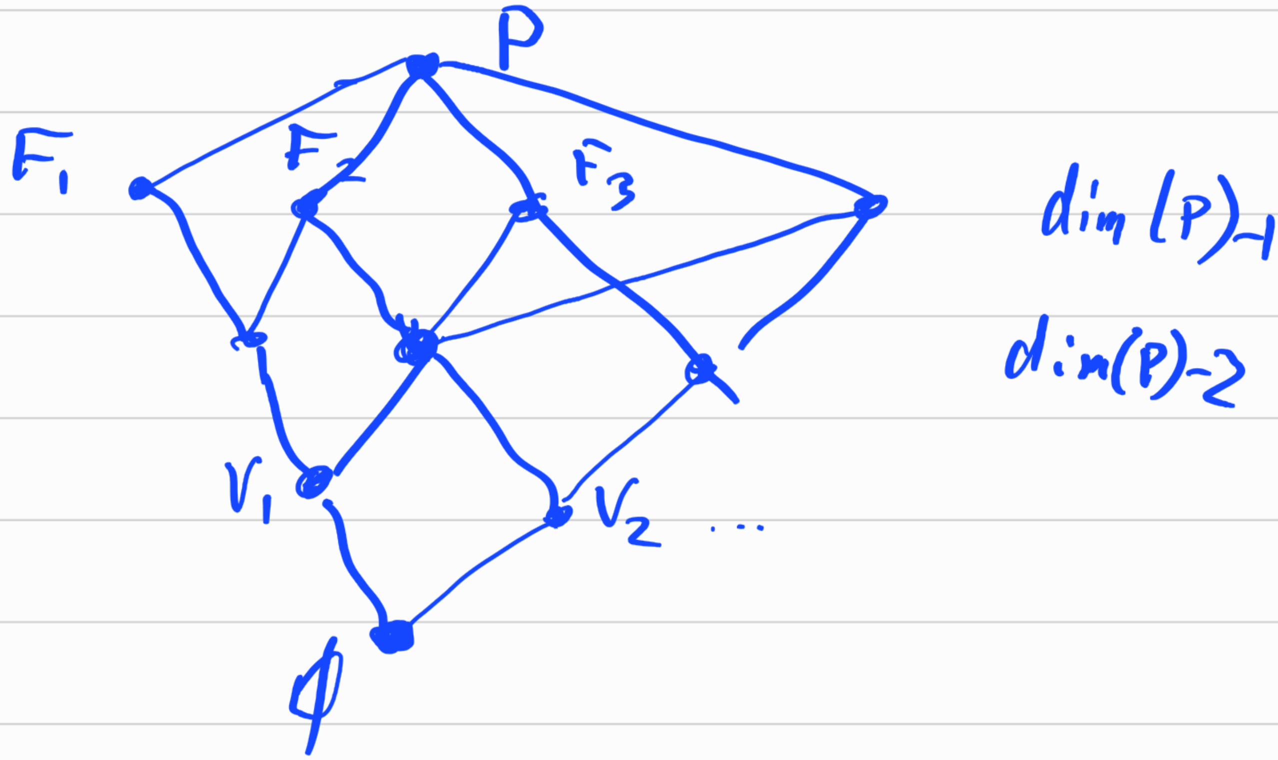
E je faseta $(\exists k)\ E \subseteq F_k$

$$\dim(E) = \dim(F_k) \Rightarrow E = F_k$$

Důsledky:

- Pokud $\dim(P) = n$ tak existuje jediný minimální popis, až na násobky nerovnic.
- Každá vlastní stěna mnohostěnu je průnikem jeho faset.

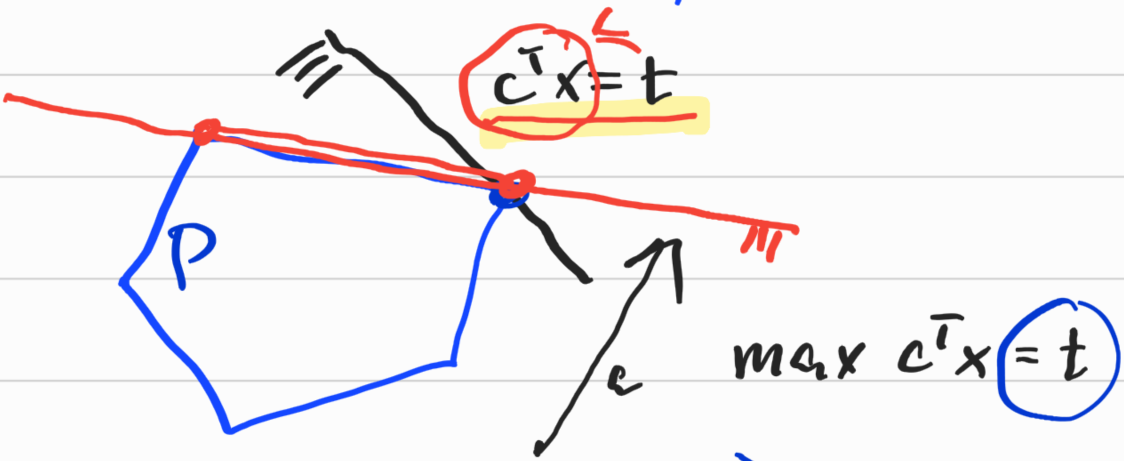




Lineární programy

přípustná řešení LP $\rightsquigarrow$ konv. mnohostěny

optimální řešení LP $\rightsquigarrow$ stěny



$$(\forall x \in P)\ c^T x \leq t$$
$$(\exists x \in P)\ c^T x = t$$

SIMPLEXOVÁ METODA

- pracuje s LP v rovnicovém tvaru

$$\left.\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ \text{přes} & x_1, \dots, x_n \geq 0 \\ \text{za podmínek} & Ax = b \end{array}\right\} P$$

$$\operatorname{rank}(A) = m \ \dots \ \#\text{řádků}$$

- hledáme řešení jen mezi vrcholy P
- vrcholy P $\rightsquigarrow$ bázická řešení