$\underline{V}$ (Minkowski-Weyl). Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$.

X je omezený konvexní mnohostěn

$\iff (\exists V \subseteq \mathbb{R}^n)(V$ konečná $\wedge\ X = \mathrm{conv}(V))$

$\underline{\text{Dk}}$: $\Longrightarrow$ minule

$\Longleftarrow$ máme V konečná

vezměme nerovnici $a^T x \leq b$ splněnou $\forall x \in V$

búno $|a_i| \leq 1$ $|b| \leq 1$

reprezentujme ji: $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$

všechny nerovnice

$Q = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; a \in [-1,+1]^n,\ b \in [-1,+1],\ (\forall v \in V)(\underline{a}^T v \leq \underline{b}) \right\}$

Q je omezená, Q je konvexní mnohostěn

z $\Longrightarrow$ vezmeme $W \subseteq Q$ W konečná

$Q = \mathrm{conv}(W)$

$(\forall x)$ x splňuje všechny nerovnice z W

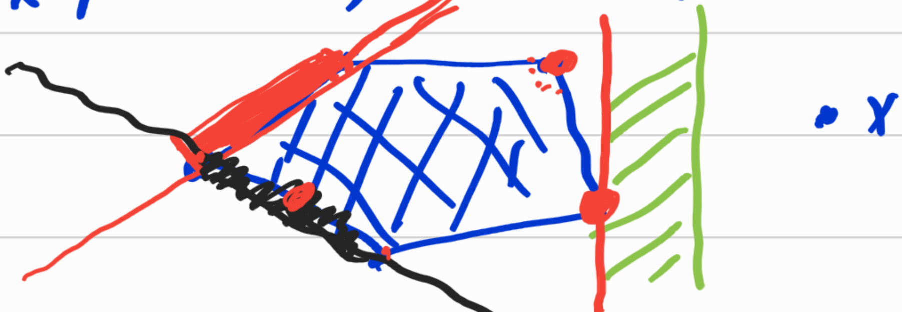
$\Rightarrow$ x splňuje všechny nerovnice z Q

$Y = \left\{ x \;\middle|\; \left(\forall \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in W\right) a^T x \leq b \right\} \leftarrow$

Chci $\underline{\mathrm{conv}(V) = Y}$

$\subseteq$: $V \subseteq Y$

$\supseteq$ $x \notin \mathrm{conv}(V) \xRightarrow{\text{chceme}} x \notin Y$



Def. P je konv. mnohostěn, $c \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$.
Jestliže $(\forall x \in P)(c^T x \leq t) \wedge (\exists x \in P)(c^T x = t)$
tak $\{x \in \mathbb{R}^n \mid c^T x = t\}$ je <u>tečná nadrovina P</u>

- $\{x \in P \mid c^T x \overset{?}{=} t\}$ je <u>stěna P</u>

Stěnami P nazýváme i $\emptyset$ a P.

Ostatní stěny jsou vlastní stěny.

Def. Vrchol je stěna dimenze 0

Hrana —— // —— 1

Faseta —— // —— $\dim(P) - 1$

Def. Nechť P je konv. mnohostěn.

$$V_{ext} = \{x \in P \mid x \notin \operatorname{conv}(P \setminus \{x\})\}$$

$\boxed{V}$ P konv. mnohostěn, V jeho vrcholy.
Pak $V = V_{ext}$.
Je-li Pomezený, tak $P = \operatorname{conv}(V)$.

Dk (pro omezené P)

V_0 … nějaká konečná $\subseteq$-minimální t.že $P = \operatorname{conv}(V_0)$

$V \subseteq V_{ext}$:

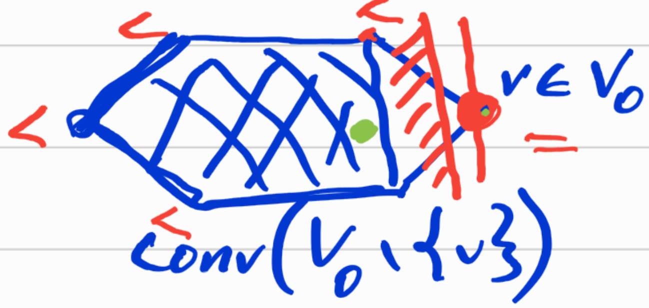
$v \in V$

$v \notin \operatorname{conv}(P - \{v\})$

$V_{ext} \subseteq V_0$ $\quad x \notin V_0$, $x \in V_{ext} \subseteq P = \operatorname{conv}(V_0)$

$V_0 \subseteq P \setminus \{x\}$

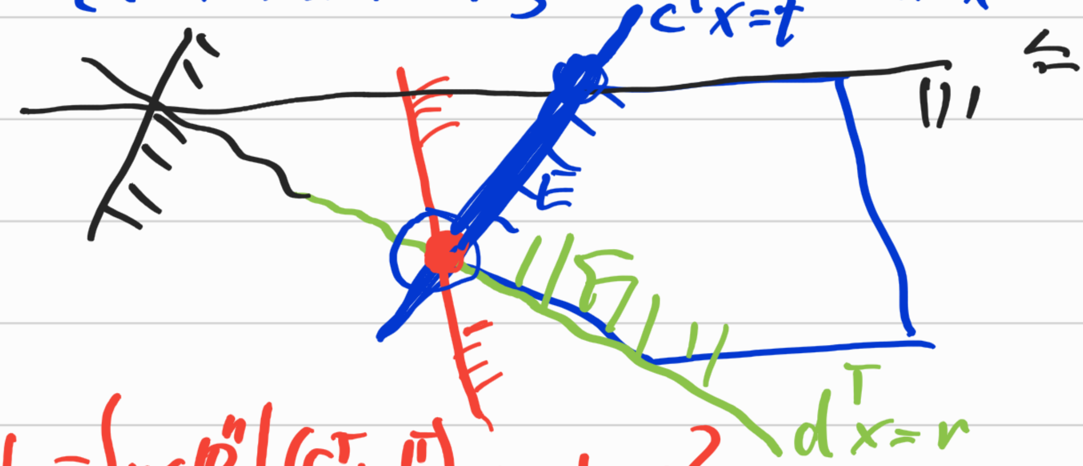
$V_0 \subseteq V$



<u>V</u>: Průnik dvou stěn mnohostěnu je stěna

<u>Dk</u>: E, F stěny P ... E nebo F je $\emptyset$ nebo P ✓

- $E = \{x \in P \mid c^T x = t\}$ $\forall x \in P$ $c^T x \leq t$
- $F = \{x \in P \mid d^T x = r\}$ $d^T x \leq r$



$L = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (c^T + d^T)x = t + r\}$

$\forall x \in P \ (c^T + d^T)x \leq t + r$

- $E \cap F \subseteq L \cap P$

  $x \in P \setminus (E \cap F) \Rightarrow x \notin L$

- $L \cap P \subseteq E \cap F$

$E \cap F = L \cap P$

$\boxed{V}$ (stěna stěny je stěna)

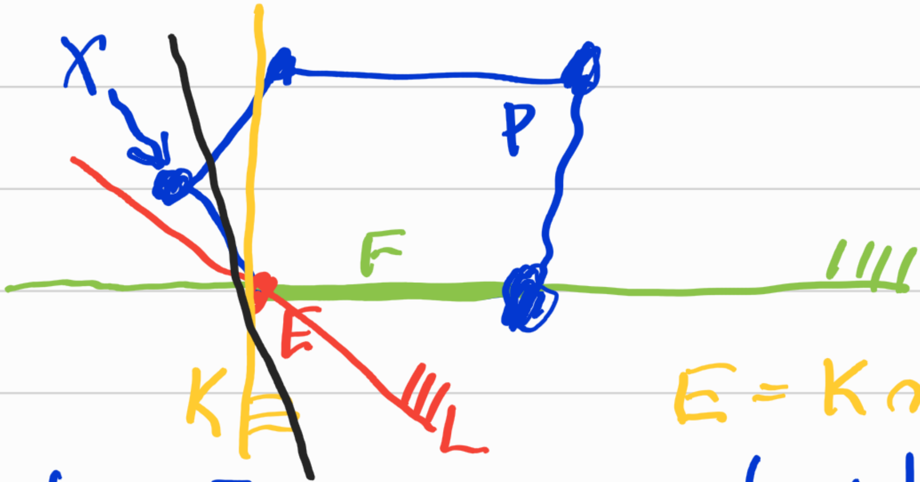
F je stěna P, $E \subseteq F$

Pak E je stěna F $\Longleftrightarrow$ E je stěna P

Dk: pro omezený mnohostěn P

$E = \emptyset$, $E = F$, $F = P$ ✓

$\Longrightarrow$ E stěna P, $E = L \cap P$ $E \subseteq L \cap F \subseteq L \cap P = E$



$E = K \cap F$

$\Longleftarrow$ E stěna F ... máme $K = \{x \in \mathbb{R} \mid d^T x = r\}$

$\forall x \in F \quad d^T x \leq r$

$F = \{x \in \mathbb{R} \mid c^T x = t\} \cap P$

$\forall x \in P \quad c^T x \leq t$

$L_\alpha = \{x \in \mathbb{R} \mid (\alpha c^T + d^T) = \alpha t + r\}$

$E \subseteq L_\alpha$

$\forall x \in P \setminus F$, pro dost velká α

$(\alpha c^T + d^T) x < \alpha t + r$

$\exists \alpha$ dost velké tak, že
$(\forall x, \text{ vrchol } P, x \notin F)$