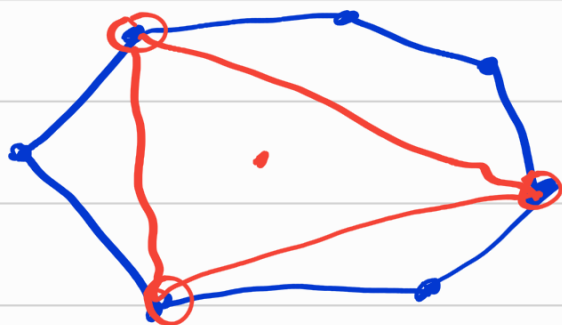




V (Carathéodory); Necht $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $\dim(X) = d$

Pak $\text{conv}(X) = \left\{ \alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_d a_d \mid a_i \in X, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=0}^d \alpha_i = 1 \right\}$

Dk: $x \in \text{conv}(X)$

1x $x = \alpha_0 a_0 + \dots + \alpha_k a_k$, k minimální

Prospor: necht $k > d$

$\Rightarrow a_0, \dots, a_k$ jsou afinně závislé

γx $0 = \beta_0 a_0 + \dots + \beta_k a_k$ l.č. $\sum \beta_i = 0$,
 $x = (\alpha_0 + \gamma \beta_0) a_0 + \dots + (\alpha_k + \gamma \beta_k) a_k$ nejsou $\forall i: \beta_i = 0$
 $\Downarrow 0$

Pozor: Necht $\forall x \in X$ splňují $a^T x \leq b$

Pak $\forall z \in \text{conv}(X)$ $a^T z \leq b$

$a^T x_0 \leq b$ $1 \cdot \alpha_0$ $\alpha_0 > 0$

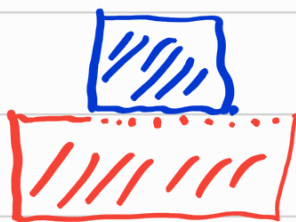
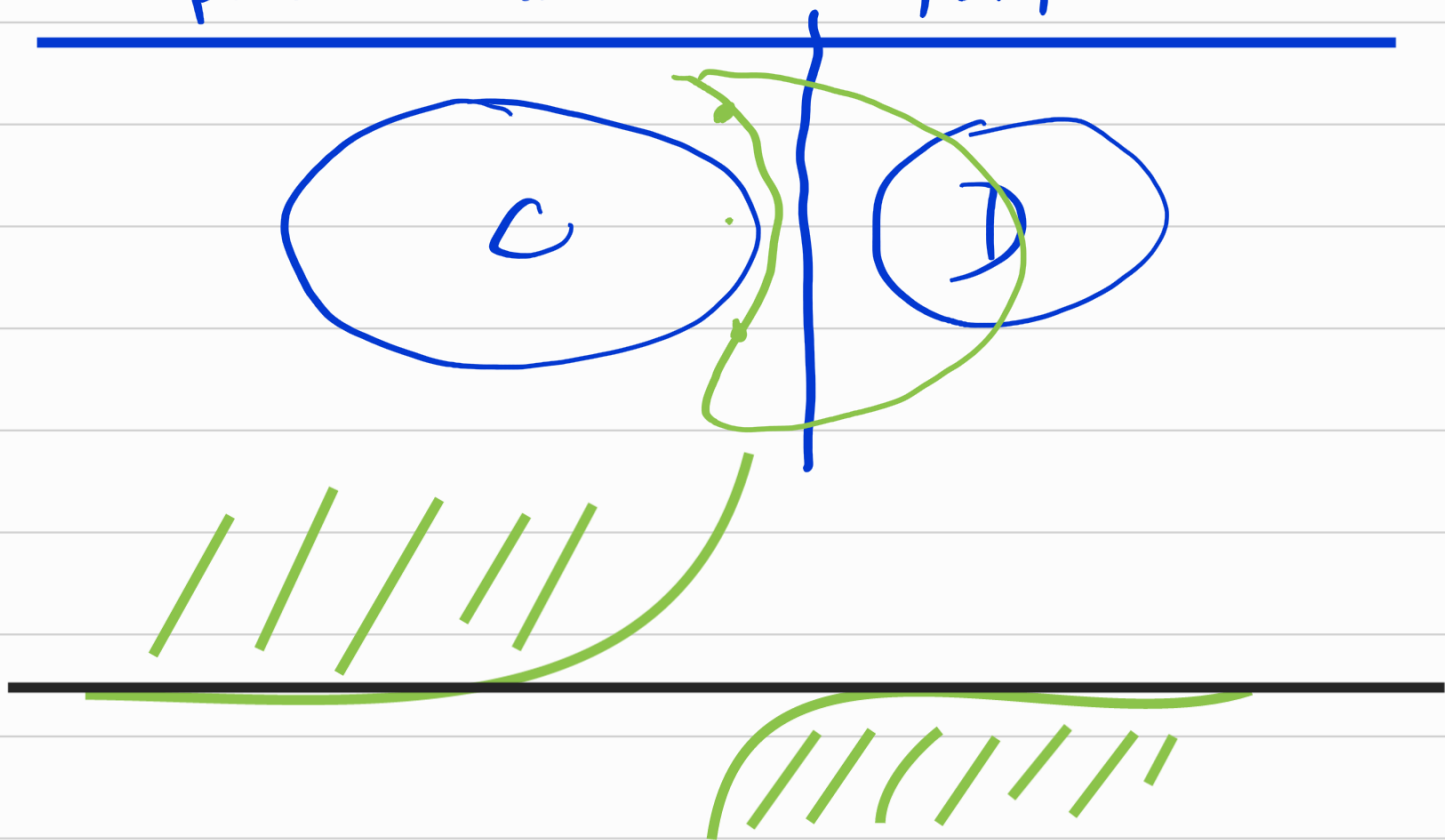
$\vdots$
 $a^T x_k \leq b$ $1 \cdot \alpha_k$

$\alpha_0, \dots, \alpha_k$
 $\underline{a^T z \leq b}$ $z = \alpha_0 x_0 + \dots + \alpha_k x_k$

[V] Necht X je konečná. Pak $\text{conv}(X)$ je kompaktní množina (= omezená, uzavřená)

Def: Nadrovina v $\mathbb{R}^n$ je $\{x \mid a^T x = b\}$ pro nějaké
 $a \in \mathbb{R}^n, a \neq 0, b \in \mathbb{R}$
 Poloprostor je $\{x \mid a^T x \leq b\}$ —||—

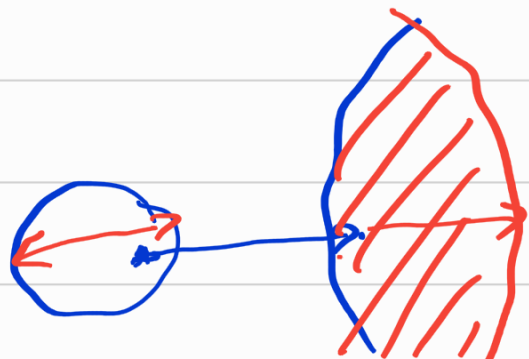
Def: Konvexní mnohostěn (polyedr) je
 průnik konečné mnoha poloprostorů.



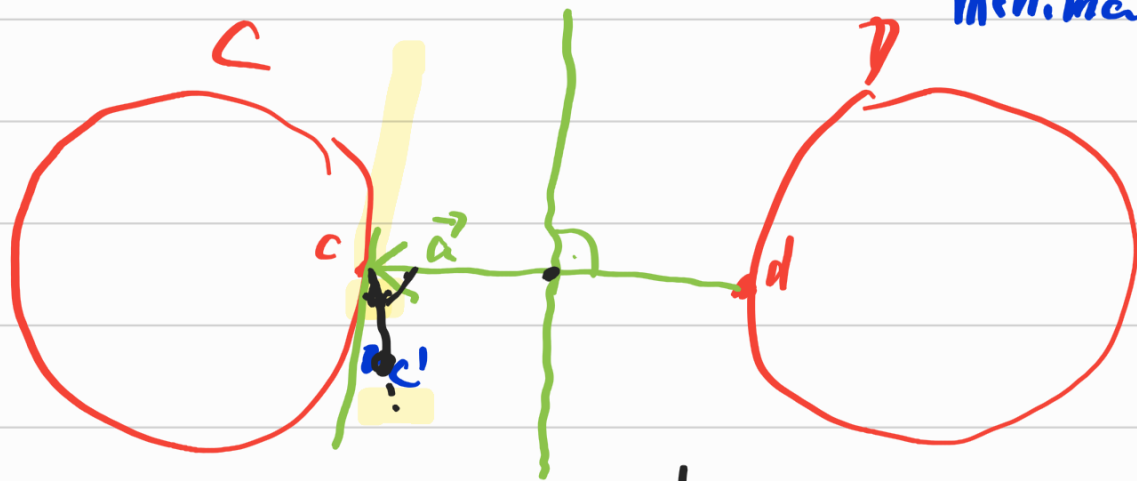
[V] Necht' $C, D \subseteq \mathbb{R}^n$, C, D jsou konvexní, uzavřené, neprázdné,
 $C \cap D = \emptyset$, C je omezená

Pak existuje $a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\begin{aligned} \forall c \in C \quad a^T c &< b \\ \forall d \in D \quad a^T d &> b \end{aligned}$$



Dk: Vezmeme $c \in C$ a $d \in D$ tak, že $\|c-d\|$ je minimální



$$a = c - d \quad b = a^T \frac{c+d}{2}$$

$$a^T c > a^T d$$

$$a^T(c-d) = \|a\|^2 > 0$$

$$a^T c' \geq a^T c > b > a^T d \geq a^T d'$$

$$\forall c' \in C$$

$$\forall d' \in D$$

V (Minkowski-Weyl) Necht' $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Pak X je omezený konv. mnohostěn

$$\Leftrightarrow (\exists V \subseteq \mathbb{R}^n, V \text{ konečná}) (X \subseteq \text{conv}(V))$$

$\Rightarrow$ indukci dle $d = \dim(X)$

$$d = -1, 0 \dots V = X$$

$$P_i = \{x \mid a_i x \leq b_i\} \quad \dots \text{ nerovnice poloprostoru} \quad i = 1, \dots, m$$

$$R_i = \{x \mid a_i x = b_i\}$$

$$X \cap R_i = X \quad L \cap R_i = L$$

$$\bullet \quad X \cap R_i \subsetneq X$$

$$\Rightarrow \text{pak } \dim(X \cap R_i) < d$$

$$\underline{L \cap R_i \neq R_i}$$



$$M = \{i \mid x \cap R_i \neq x\}$$

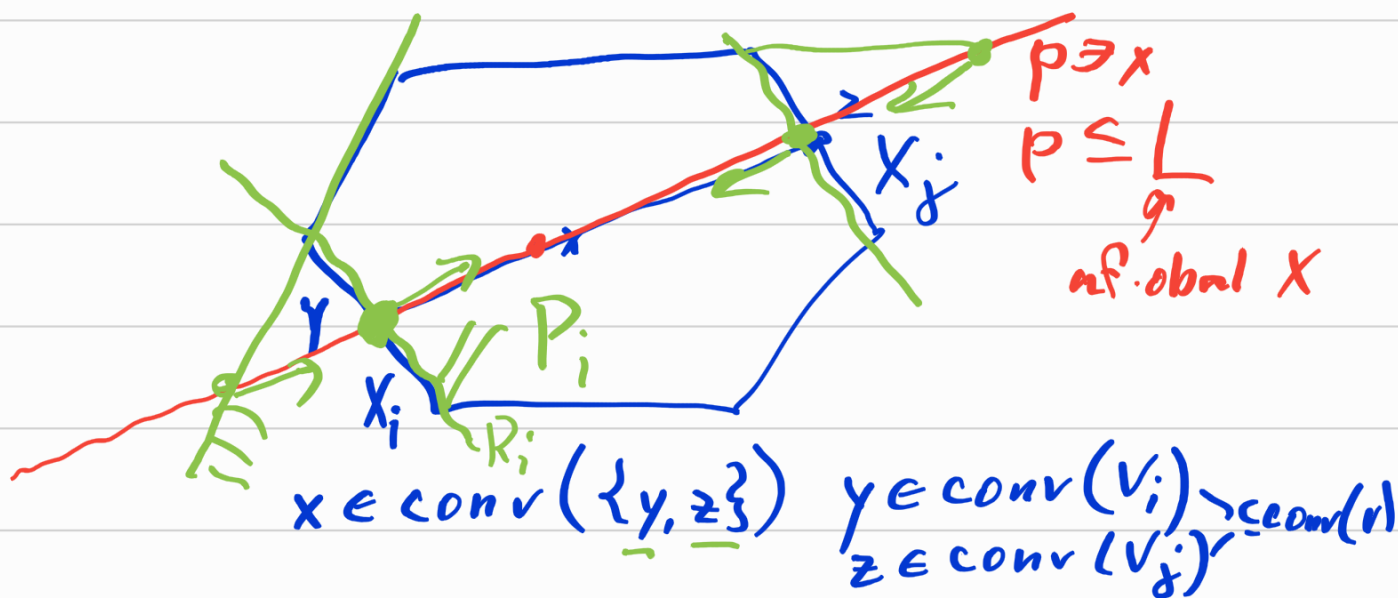
V_i dle ind. předpokladu $\text{conv}(v_i) = X \cap R_i$

$$V = \bigcup_{i \in M} V_i$$

$$V_i \subseteq X$$

$$\text{conv}(v) = X \quad \text{conv}(v) \subseteq X$$

$x \in X$ chceme ukázat, že $x \in \text{conv}(V)$



$$p \cap \bigcap_{i \in M} P_i = p \cap \bigcap_i P_i = p \cap X \dots \text{je omezená množina} \Rightarrow \text{úsečka}$$

$$\bigcup_i \cap (p \cap p_i)$$

→ polopřímky