Příklad LP: Nejkratší cesta

VSTUP: orientovaný graf $G=(V,E)$

ceny $c_e \geq 0$, vrcholy s,t

VÝSTUP: nejkratší cesta z s do t

---

minimalizuj $\sum_{e\in E} c_e x_e$

pro $x_e \in \cancel{\{0,1\}} \geq 0 \quad e\in E$

za podmínek $\sum_{u:uv\in E} x_{uv} - \sum_{w:vw\in E} x_{vw} = \begin{cases}-1 & v=s\\ +1 & v=t \\ 0 & \text{jinak}\end{cases} \quad \forall v\in V$

---

maximalizuj $\underline{y_t - y_s}$

přes $y_v \in \mathbb{R} \quad v\in V$

za podmínek $y_v - y_u \leq c_{uv} \quad \forall uv\in E$

$y_v :=$ délka nejkratší cesty $s \rightsquigarrow v$

— toto je příp. řešení

jakékoliv příp. řešení má $y_t - y_s \leq \underline{\text{délka } s \rightsquigarrow t}$

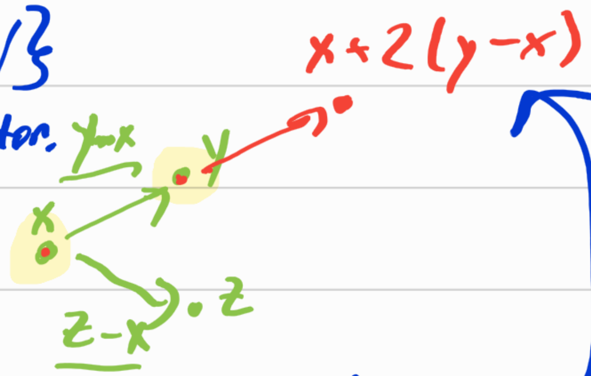
$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ ... konvexní mnohostěny

$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$ ... vektorové podprostory $\mathbb{R}^n$

$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$ ... afinní prostory

Def: $L \subseteq \mathbb{R}^n$ je afinní prostor, jestliže existuje $x \in \mathbb{R}^n$ a V vekt. podprostor $\mathbb{R}^n$ tak, že
$L = x + V = \{x + y \mid y \in V\}$

$L = \emptyset$ se považuje za afinní prostor.



Def: Dimenze afinního prostoru je $\dim(V)$ z def.
Dimenze $L = \emptyset$ je -1.

Def: Afinní obal množiny $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je průnik všech afinních prostorů L takových, že $X \subseteq L$.

Def: Afinní kombinace bodů z X je libovolný bod
$\alpha_0 x_0 + \ldots + \alpha_k x_k$ pro $x_0, \ldots, x_k \in X$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$
$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 1$$

Věta: Afinní obal X je roven množině všech afinních kombinací bodů z X.

Afinní obal X je afinní prostor.

Def: Body $a_0, \ldots, a_k$ jsou afinně nezávislé, jestliže $(\forall \alpha_0, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R})\left[\left(\alpha_0 a_0 + \ldots + \alpha_k a_k = 0 \wedge \sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 0\right) \Rightarrow \alpha_0 = \ldots = \alpha_k = 0\right]$

$a_0 = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k$

$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$

Pozorování: $a_0, \dots, a_k$ jsou afinně nez. $\iff$ $a_1 - a_0, a_2 - a_0, \dots, a_k - a_0$ jsou lineárně nezávislé vektory

$0 = \underline{-1} a_1 + \underline{\alpha} a_0 + (\underline{1-\alpha}) a_2$

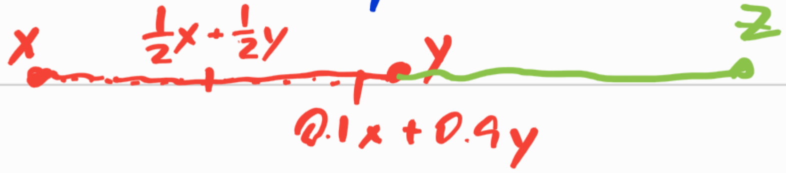
Def: Dimenze množiny $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je $\dim(X)$ = dimenze afinního obalu X

Pozorování: Dimenze $X \neq \emptyset$ je max. k takové, že existuje $k+1$ afinně nezávislých bodů v X

KONVEXNÍ MNOŽINY

Def: $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní, jestliže $\forall x, y \in X, \forall t \in [0,1]$

• $tx + (1-t)y \in X$



Def: Konvexní kombinace bodů z X je libovolný bod $\alpha_0 x_0 + \dots + \alpha_k x_k$ pro $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_0, \dots, \alpha_k \geq 0$, $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 1$, $x_i \in X$

Pozorování:

• Pokud $X \subseteq C$, C konvexní, tak každá konvexní kombinace bodů z X je v C.

• Nechť Y jsou nějaké konvexní komb. z X. Pak každá konv. komb. bodů z Y je i k.k. bodů X.

Def: Konvexní obal $X \subseteq \mathbb{R}^n$, značíme $\mathrm{conv}(X)$, je průnik všech konvexních $C \subseteq \mathbb{R}^n$ obsahujících X.

V: $\mathrm{conv}(X) = \{\alpha_0 x_0 + \dots + \alpha_k x_k \mid k \in \mathbb{N}, \alpha_i \geq 0, \sum \alpha_i = 1, x_i \in X\}$

Y:

Dk:

• Y je konvexní, tedy $\mathrm{conv}(X) \subseteq Y$

• každé C konvexní, $C \supseteq X$ obsahuje i Y

tedy $Y \subseteq \bigcap \{C \mid \dots\} = \mathrm{conv}(X)$